

令和 5 年 度

Ⅱ 数 学

(10 時 10 分 ～ 11 時 00 分)

注 意

- 問題用紙は 3 枚 (3 ページ) あります。
- 解答用紙はこの用紙の裏面です。
- 答えはすべて、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
- 解答用紙の  の欄には記入してはいけません。

注 意

- 1 答えに $\sqrt{\quad}$ が含まれるときは、 $\sqrt{\quad}$ をつけたままで答えなさい。
ただし、 $\sqrt{\quad}$ の中はできるだけ小さい自然数にしない。
- 2 円周率は π を用いなさい。

1 次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 次の計算をしなさい。

- ① $(-21) \div 7$
- ② $-\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$
- ③ $(-3a) \times (-2b)^3$
- ④ $\sqrt{8} - \sqrt{18}$

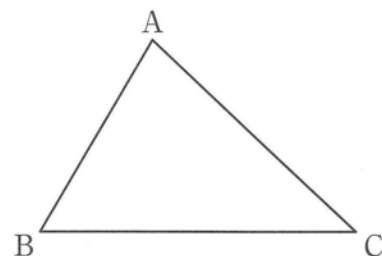
(2) ある球の半径を 2 倍にすると、体積はもとの球の体積の何倍になるか、求めなさい。

2 次の (1) ~ (5) の問いに答えなさい。

(1) 桃の果汁が 31 % の割合で含まれている飲み物がある。この飲み物 a mL に含まれている桃の果汁の量は何 mL か、 a を使った式で表しなさい。

(2) 等式 $3x + 2y - 4 = 0$ を y について解きなさい。

(3) 右の図のような、 $\triangle ABC$ がある。
辺 AC 上にあって、辺 AB , BC までの距離が等しい点 P を、定規とコンパスを用いて作図によって求め、 P の位置を示す文字 P も書きなさい。
ただし、作図に用いた線は消さずに残しておきなさい。



(4) 関数 $y = x^2$ について、 x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(5) 図 1 は、ある学級の生徒 30 人について、先月の図書館の利用回数を調べ、その分布のようすをヒストグラムに表したものである。例えば、利用回数が 2 回以上 4 回未満の生徒は 3 人であることがわかる。また、図 2 のア~エのいずれかは、この利用回数の分布のようすを箱ひげ図に表したものである。その箱ひげ図をア~エの中から 1 つ選び、記号で答えなさい。

図 1

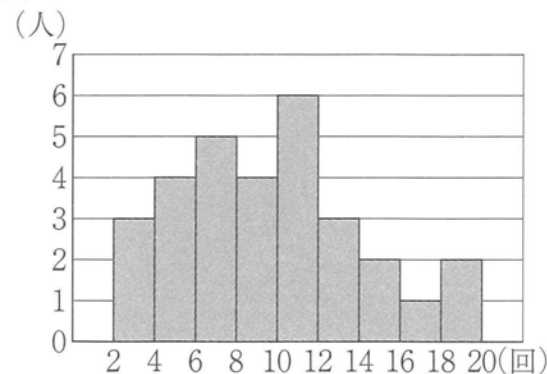
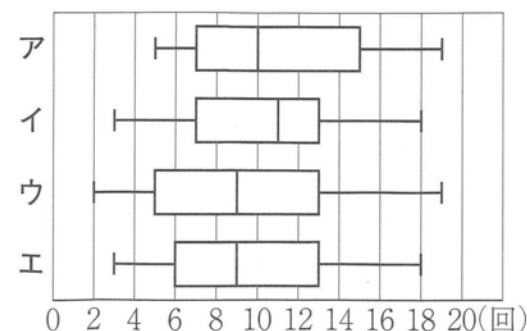
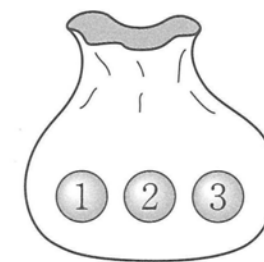


図 2



3 次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 右の図のように、袋の中に 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 3 個の玉が入っている。A, B の 2 人が、この袋の中から、**<取り出し方のルール>** の (ア), (イ) のいずれかにしたがって、1 個ずつ玉を取り出し、書かれた数が多いほうの玉を取り出した人が景品をもらえるゲームを考える。書かれた数が等しい場合には 2 人とも景品はもらえない。ただし、どの玉を取り出すことも同様に確からしいものとする。



<取り出し方のルール>

- (ア) はじめに A が玉を取り出す。次に、その取り出した玉を袋の中にもどし、よくかき混ぜてから B が玉を取り出す。
- (イ) はじめに A が玉を取り出す。次に、その取り出した玉を袋の中にもどさず、続けて B が玉を取り出す。

- ① ルール (ア) にしたがったとき、A が景品をもらえる確率を求めなさい。
- ② A が景品をもらえない確率が高いのは、ルール (ア), (イ) のどちらのルールにしたがったときか。ア, イの記号で答え、その確率も書きなさい。

(2) 図 1 のように、整数を 1 から順に 1 段に 7 つずつ並べたものを考え、縦、横に 2 つずつ並んでいる 4 つの整数を四角形で囲む。ただし、 $\circ$ は整数を省略したものであり、囲んだ位置は例である。

このとき、囲んだ 4 つの整数を

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

とすると、 $ad - bc$ はつねに同じ値になる。

- ① $ad - bc$ の値を求めなさい。
- ② 図 2 のように、1 段に並べる整数の個数を n に変えたものを考える。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

このとき、 $ad - bc$ はつねに n を使って表された同じ式になる。その式を解答用紙の () の中に書きなさい。また、それがつねに成り立つ理由を説明しなさい。

図 1

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

図 2

1	○	○	○	⋯	n
○	○	○	○	⋯	○
○	○	○	○	⋯	○
○	○	○	○	⋯	○
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- 4 ある中学校で地域の清掃活動を行うために、生徒 200 人が 4 人 1 組または 5 人 1 組のグループに分かれた。ごみ袋を配るとき、1 人 1 枚ずつに加え、グループごとの予備として 4 人のグループには 2 枚ずつ、5 人のグループには 3 枚ずつ配ったところ、配ったごみ袋は全部で 314 枚であった。

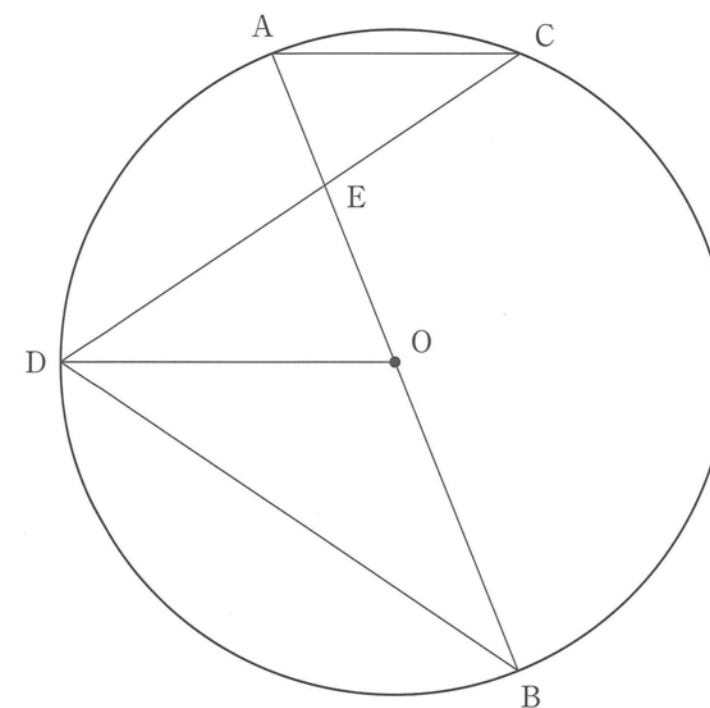
このとき、4 人のグループの数と 5 人のグループの数をそれぞれ求めなさい。

求める過程も書きなさい。

- 5 下の図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に、直線 AB に対して反対側にある 2 点 C, D を $AC \parallel DO$ となるようにとる。また、線分 AB と線分 CD との交点を E とする。

このとき、次の (1), (2) の問いに答えなさい。

- (1) $\triangle EDO \sim \triangle EBD$ となることを証明しなさい。
- (2) $AC : DO = 7 : 9$ であるとき、 $\triangle EDO$ と $\triangle EBD$ の相似比を求めなさい。



- 6 図1のように、反比例 $y = \frac{a}{x}$ ($x > 0$) のグラフ上に2点 A, B があり、A の y 座標は6、B の x 座標は2である。また、比例 $y = ax$ のグラフ上に点 C, x 軸上に点 D があり、A と D の x 座標、B と C の x 座標はそれぞれ等しい。ただし、 $0 < a < 12$ とする。

次の「会話」は、花子さんと太郎さんが四角形 ADBC について考察し、話し合った内容である。

「会話」

花子さん： a の値を1つとると、2つのグラフが定まり、4つの辺と面積も定まるね。点 A の座標は、反比例の関係 $xy = a$ から求めることができそうだよ。

太郎さん：例えば、 $a = 1$ のときの四角形について調べてみようか。

.....

太郎さん：形を見ると、いつでも台形だね。平行四辺形になるときはあるのかな？

花子さん：私は、面積についても調べてみたよ。そうしたら、 $a = 1$ のときと面積が等しくなる四角形が他にもう1つあることがわかったよ。

このとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

- (1) 図2は、図1において、 $a = 1$ とした場合を表している。このとき、線分 BC の長さを求めなさい。
- (2) 四角形 ADBC が平行四辺形になるときの a の値を求めなさい。
- (3) 「会話」の下線部について、四角形 ADBC の面積が $a = 1$ のときの面積と等しくなるような a の値を、 $a = 1$ の他に求めなさい。

図1

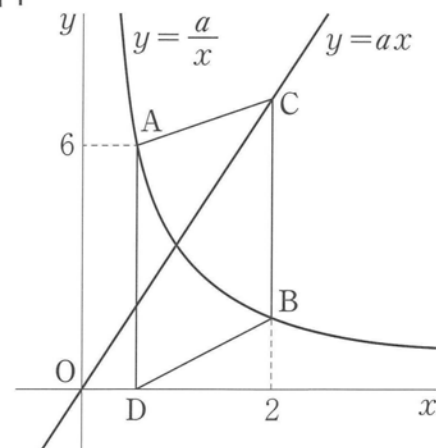
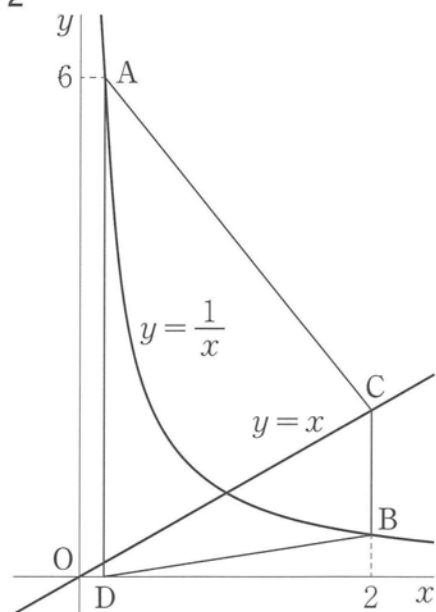


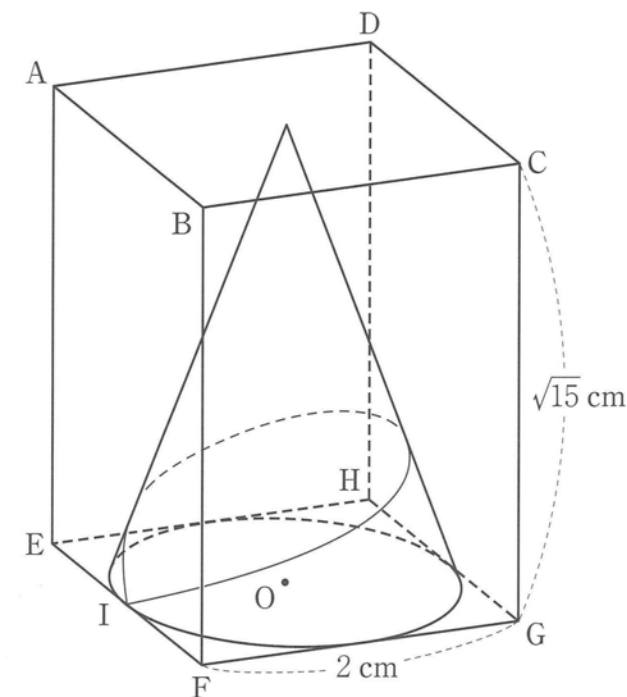
図2

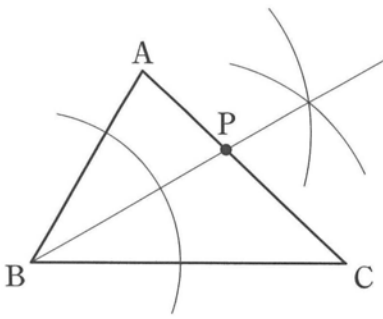


- 7 下の図のように、底面が1辺2 cm の正方形で、高さが $\sqrt{15}$ cm の正四角柱と、正方形 EFGH のすべての辺に接する円 O を底面とする円錐があり、それらの高さは等しい。また、線分 EF と円 O との接点 I から円錐の側面にそって1周して I にもどるひもが、最も短くなるようにかけられている。ただし、円錐において、頂点と点 O を結ぶ線分は底面に垂直である。

このとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

- (1) 円錐の母線の長さを求めなさい。
- (2) ひもの長さを求めなさい。ただし、ひもの太さや伸び縮みは考えないものとする。
- (3) ひもの通る線上に点 P をとる。P を頂点とし、四角形 ABCD を底面とする四角錐の体積が最も小さくなるとき、その体積を求めなさい。



問 題		正 解	標準 配点	備 考
大	小			
1	(1)	① -3	2	
		② $\frac{1}{12}$	2	
		③ $24ab^3$	2	
		④ $-\sqrt{2}$	2	
	(2)	8 倍	2	
2	(1)	$\frac{31}{100}a$ mL	2	
	(2)	$y = -\frac{3}{2}x + 2$	2	
	(3)	[作図の例] 	2	
	(4)	5	2	
	(5)	Ⅰ	2	
3	(1)	① $\frac{1}{3}$	2	
		② ルール ア , 確率 $\frac{2}{3}$	2	
	(2)	① -7	1	
		②	3	
		($-n$) [理由の例] b, c, d は, a と n を使ってそれぞれ $b = a + 1$ $c = a + n$ $d = a + n + 1$ と表される。 このとき $ad - bc$ $= a(a + n + 1) - (a + 1)(a + n)$ $= a^2 + an + a - (a^2 + an + a + n)$ $= a^2 + an + a - a^2 - an - a - n$ $= -n$ したがって, $ad - bc$ はつねに $-n$ になる。		

問 題		正 解	標準 配点	備 考
大	小			
4		[求める過程の例] 4 人のグループの数を x, 5 人のグループの数を y とすると, 生徒は 200 人であるから $4x + 5y = 200$① ごみ袋を配るとき, 1 人 1 枚ずつに加え, グループごとの 予備として 4 人のグループには 2 枚ずつ, 5 人のグループ には 3 枚ずつ配ったところ, 配ったごみ袋は全部で 314 枚 であるから $200 + 2x + 3y = 314$ これを整理して $2x + 3y = 114$② ①, ② を連立方程式として解いて $x = 15, y = 28$ これらは問題に適している。 答 $\begin{cases} 4 \text{ 人のグループの数 } \underline{15} \\ 5 \text{ 人のグループの数 } \underline{28} \end{cases}$	5	
	(1)	[証明の例 1] $\triangle EDO$ と $\triangle EBD$ において 共通な角は等しいから $\angle DEO = \angle BED$① $AC \parallel DO$ より, 平行線の錯角は等しいから $\angle EDO = \angle ACD$② $\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから $\angle ACD = \angle EBD$③ ②, ③ から $\angle EDO = \angle EBD$④ ①, ④ より, 2 組の角がそれぞれ等しいから $\triangle EDO \sim \triangle EBD$ [証明の例 2] $\triangle EDO$ と $\triangle EBD$ において $AC \parallel DO$ より, 平行線の錯角は等しいから $\angle EDO = \angle ACD$① $\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから $\angle ACD = \angle EBD$② ①, ② から $\angle EDO = \angle EBD$③ $\triangle ODB$ で, 三角形の外角は, それととなり合わない 2 つの 内角の和に等しいから $\angle EOD = \angle ODB + \angle EBD$④ また $\angle EDB = \angle ODB + \angle EDO$⑤ ③, ④, ⑤ から $\angle EOD = \angle EDB$⑥ ③, ⑥ より, 2 組の角がそれぞれ等しいから $\triangle EDO \sim \triangle EBD$	3	
5	(2)	3 : 5	2	
	(1)	$\frac{3}{2}$	1	
	(2)	$a = 4$	2	
6	(3)	$a = 7$	3	
	(1)	4 cm	1	
	(2)	$4\sqrt{2}$ cm	2	
7	(3)	$\frac{2\sqrt{30}}{3}$ cm ³	3	

※部分点については, 各校において統一した基準を設けて採点するものとする。