円に内接する四角形$ABCD$の対角線の交点をEとし、辺AB, BC, CD, DAの長さをそれぞれa, b, c, dとする。

（１）$\angle DAB = \theta$とするとき、$\cos\theta$を、a, b, c, dを用いて表せ。

（２）対角線AC, BDの長さをa, b, c, dを用いて表せ。

（３）四角形$ABCD$の面積をSとするとき、Sを、a, b, c, dを用いて表せ。

（４）四角形$ABCD$の外接円の半径をRとするとき、Rを、a, b, c, dを用いて表せ。

（５）$AE : BE : CE : DE = da : ab : bc : cd$が成り立つことを示せ。

（６）AE, BE, CE, DEの長さをa, b, c, dを用いて表せ。

四角形$ABCD$の対角線4つの三角形$\triangle EAB, \triangle EBC, \triangle ECD, \triangle EDA$について考える。

（７）$\triangle EAB, \triangle EBC, \triangle ECD, \triangle EDA$の面積をそれぞれ$S_i\ (i = 1,2,3,4)$とするとき、$S_i\ (i = 1,2,3,4)$を$a, b, c, d$を用いて表せ。

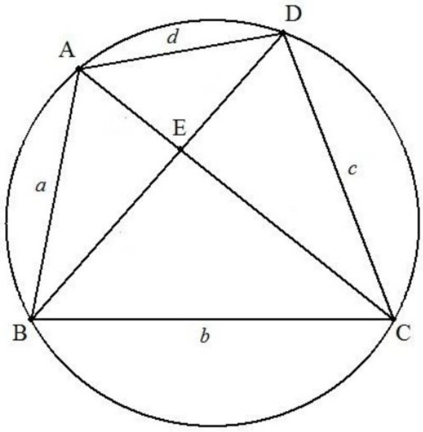
（８）$\triangle EAB, \triangle EBC, \triangle ECD, \triangle EDA$の内接円の半径をそれぞれ$r_i\ (i = 1,2,3,4)$とするとき、$r_i\ (i = 1,2,3,4)$を$a, b, c, d$を用いて表せ。

（９）四角形$ABCD$が内接円を持つとき、$a + d = b + c$および$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = \dfrac{1}{c} : \dfrac{1}{d} : \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b}$が成り立つことを示せ。

（10）四角形$ABCD$が内接円を持つとき、内接円の半径をrとする。rを、a, b, c, dを用いて表せ。

（解答）

（１）四角形$ABCD$は円に内接しているので、$\angle DAB = \theta$とするとき、$\angle BCD = \pi - \theta$である。



$\triangle ABD$に余弦定理を適応すると、

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta \cdots ①$$

が成り立つ。

$\triangle BCD$に余弦定理を適応すると、

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \theta) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta \cdots ②$$

が成り立つ。

①,②より

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta$$

よって、

$$\cos\theta = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \cdots ③$$

（２）四角形$ABCD$は円に内接しているので、$\angle ABC = \varphi$とするとき、$\angle CDA = \pi - \varphi$である。

$\triangle ABC$に余弦定理を適応すると、

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi \cdots ④$$

が成り立つ。
△ACDに余弦定理を適応すると、

$$AC^2=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\varphi)=c^2+d^2+2cd\cos\varphi\cdots⑤$$

が成り立つ。
④,⑤より

$$a^2+b^2-2ab\cos\varphi=c^2+d^2+2cd\cos\varphi$$

よって、

$$\cos\varphi=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\cdots⑥$$

③を①に代入すると、

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cdot\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}=\frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

$BD>0$ より $BD=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}\cdots⑦$

⑥を④に代入すると、

$AC>0$ より $AC=\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}\cdots⑧$

（3） $S=\dfrac{1}{2}ad\sin\theta+\dfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta)=\dfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta\cdots⑨$

③より

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left\{\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right\}^2=\frac{\{2(ad+bc)\}^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{\{2(ad+bc)\}^2}$$

$$=\frac{(a^2+2ad+d^2-b^2+2bc-c^2)(b^2+2bc+c^2-a^2+2ad-d^2)}{\{2(ad+bc)\}^2}$$

$$=\frac{\{(a+d)^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-(a-d)^2\}}{\{2(ad+bc)\}^2}$$

$$=\frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{\{2(ad+bc)\}^2}$$

$$=\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{\{2(ad+bc)\}^2}$$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ であるから、

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(ad+bc)}\cdots⑩$$

⑩を⑨に代入すると、

$$S=\frac{1}{2}(ad+bc)\cdot\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(ad+bc)}$$

$$=\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4}$$

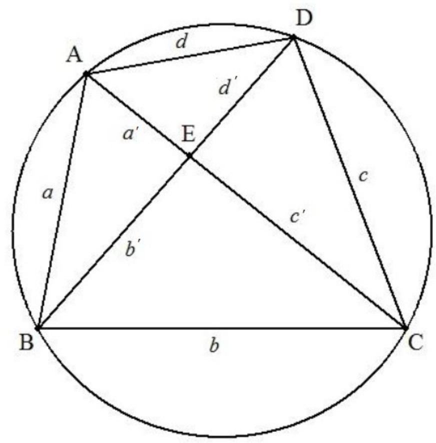
（4） R は△ ABD の外接円の半径と一致するので、△ ABD に正弦定理を適応すると、

$\dfrac{BD}{\sin\theta}=2R$ より⑦,⑩を代入すると、

$$R=\frac{BD}{2\sin\theta}=\frac{\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}}{\dfrac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{(ad+bc)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}$$

（5） $AE=a', BE=b', CE=c', DE=d'$ とおくと、



△ EDA ∽△ ECB より $a':b'=d:b$ …⑪

△ EAB ∽△ EDC より $b':c'=a:c$ …⑫

△ EBC ∽△ EAD より $c':d'=b:d$ …⑬

⑪より $a':b'=ad:ab$ …⑪’

⑫より $b':c'=ab:bc$ …⑫’

⑪’と⑫’より $a':b':c'=ad:ab:bc$ …⑭

⑬より $c':d'=bc:cd$ …⑬’

⑫’と⑬’より $b':c':d'=ab:bc:cd$ …⑮

⑭,⑮より $a':b':c':d'=da:ab:bc:cd$

よって、 $AE:BE:CE:DE=da:ab:bc:cd$

（6） $AE=\dfrac{a'}{a'+c'}AC=\dfrac{ad}{ad+bc}\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}=ad\sqrt{\dfrac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}$

$$BE=\frac{b'}{b'+d'}BD=\frac{ab}{ab+cd}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}=ab\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}$$

$$CE=\frac{c'}{a'+c'}AC=\frac{bc}{ad+bc}\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}=bc\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}$$

$$DE=\frac{d'}{b'+d'}BD=\frac{cd}{ab+cd}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}=cd\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}$$

（7） $S_1=\frac{a'}{a'+c'}\cdot\frac{b'}{b'+d'}\cdot S=\frac{ad}{ad+bc}\cdot\frac{ab}{ab+cd}\cdot S$

$$=\frac{da^2b\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4(ab+cd)(ab+cd)}$$

$S_2=\frac{c'}{a'+c'}\cdot\frac{b'}{b'+d'}\cdot S=\frac{bc}{ad+bc}\cdot\frac{ab}{ab+cd}\cdot S$

$$=\frac{ab^2c\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4(ab+cd)(ab+cd)}$$

$S_3=\frac{c'}{a'+c'}\cdot\frac{d'}{b'+d'}\cdot S=\frac{bc}{ad+bc}\cdot\frac{cd}{ab+cd}\cdot S$

$$=\frac{bc^2d\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4(ab+cd)(ab+cd)}$$

$S_4=\frac{a'}{a'+c'}\cdot\frac{d'}{b'+d'}\cdot S=\frac{ad}{ad+bc}\cdot\frac{cd}{ab+cd}\cdot S$

$$=\frac{cd^2a\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4(ab+cd)(ab+cd)}$$

（8） $r_1=\frac{2S_1}{AB+AE+BE}$

$$=\frac{2}{a+ad\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}+ab\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}}\cdot\frac{da^2b}{(ab+cd)(ad+bc)}\cdot S$$

$$=\frac{2dabS}{(ab+cd)(ad+bc)+(b+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$=\frac{dab\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2\{(ab+cd)(ad+bc)+(b+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\}}$$

$r_2=\frac{2S_2}{BC+BE+CE}$

$$=\frac{2}{b+ab\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}+bc\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}}\cdot\frac{ab^2c}{(ab+cd)(ad+bc)}\cdot S$$

$$=\frac{2abcS}{(ab+cd)(ad+bc)+(a+c)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$=\frac{abc\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2\left\{(ab+cd)(ad+bc)+(a+c)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\right\}}$$

$$r_3=\frac{2S_3}{CD+CE+DE}$$

$$=\frac{2}{c+bc\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}+cd\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}}\cdot\frac{bc^2d}{(ab+cd)(ad+bc)}\cdot S$$

$$=\frac{2bcdS}{(ab+cd)(ad+bc)+(b+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$=\frac{bcd\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2\left\{(ab+cd)(ad+bc)+(b+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\right\}}$$

$$r_4=\frac{2S_4}{DA+DE+AE}$$

$$=\frac{2}{d+cd\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}+ad\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}}\cdot\frac{cd^2a}{(ab+cd)(ad+bc)}\cdot S$$

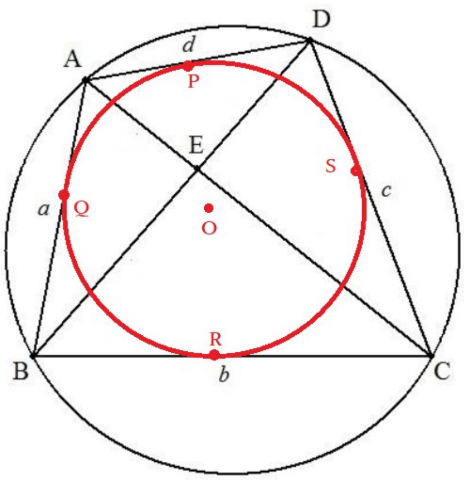
$$=\frac{2cdaS}{(ab+cd)(ad+bc)+(a+c)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$=\frac{cda\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2\left\{(ab+cd)(ad+bc)+(a+c)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\right\}}$$

（9）四角形 $ABCD$ の内接円の中心を O とし、
点 A から内接円に接線を引いたときの接点を P,Q
とするとき、$\angle APO=\angle AQO=\frac{\pi}{2}$
三平方の定理より、

$$AO^2=AP^2+OP^2=AQ^2+OQ^2$$

$OP=OQ$ より $AP=AQ$
同様にして、$BQ=BR, CR=CS, DS=DP$ より、
$AB+CD=a+c=AQ+BQ+CS+DS$
$AD+BC=b+d=AP+DP+BR+CR$
$AP=AQ, BQ=BR, CR=CS, DS=DP$ より
$a+c=b+d$ が成り立つ。



$a+c=b+d$ のとき、

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = dab : abc : bcd : cda = \frac{1}{c} : \frac{1}{d} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

（10） $r = \dfrac{2S}{a+b+c+d} = \dfrac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(a+b+c+d)}$