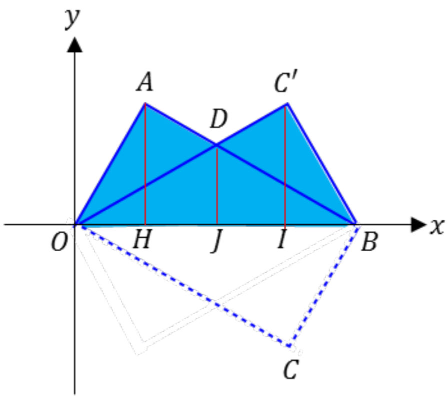
縦の長さがa,横の長さがbの長方形を、対角線を軸として1回転させて得られる回転体の体積をVとする。Vを、a,bを用いて表せ。ただし、$a<b$とする。

（解答）



$OA=a, OC=b$である長方形$OABC$の対角線OBをx軸上にとり、右の図のように配置する。
Cとx軸に対して対称にある点をC'とし、線分OC'とABとの交点をDとする。
A, C', Dからx軸に下ろした垂線の足をそれぞれH, I, Jとすると、

$$OB=\sqrt{a^2+b^2},$$

$OA:AH=OB:BA$より、$AH=\dfrac{OA\cdot BA}{OB}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$BJ=\frac{1}{2}OB=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$OA:OH=OB:OA$より、$OH=\dfrac{OA^2}{OB}=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$BH=OB-OH=\sqrt{a^2+b^2}-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$DJ:AH=BJ:BH$より、$DJ=\dfrac{AH\cdot BJ}{BH}=\dfrac{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}{\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$

求める体積は、
（底面の半径AHで高さOHの円錐の体積）＋（底面の半径AHで高さHBの円錐の体積）＋
（底面の半径$C'I$で高さIBの円錐の体積）＋（底面の半径$C'I$で高さOIの円錐の体積）－
（底面の半径DJで高さOJの円錐の体積）－（底面の半径DJで高さJBの円錐の体積）
であり、対称性を考慮して、
（底面の半径AHで高さOBの円錐の体積）×2－（底面の半径DJで高さOBの円錐の体積）
となり、

$$V=\frac{1}{3}\pi AH^2\cdot OB\cdot 2-\frac{1}{3}\pi DJ^2\cdot OB=\frac{1}{3}\pi\cdot OB\left(2\cdot AH^2-DJ^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}-\frac{a^2\left(a^2+b^2\right)}{4b^2}\right\}=\frac{\pi a^2\left(7b^4-a^4-2a^2b^2\right)}{12b^2\sqrt{a^2+b^2}}$$