Oを中心とする半径1の円に正n角形$A_1A_2\cdots A_n$が存在し、この正n角形をD_nとする。
また正n角形$B_1B_2\cdots B_n$を$D_n{}'$とし、点$A_k = B_k\ (k = 1,2,3,\cdots,n)$を満たしている。$D_n$を、
Oを中心に$\theta\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{2\pi}{n}\right)$だけ回転させる。

（１）辺A_1A_2とB_1B_nの交点をCとするとき、$\angle A_1OC = \dfrac{\theta}{2}$であることを示せ。

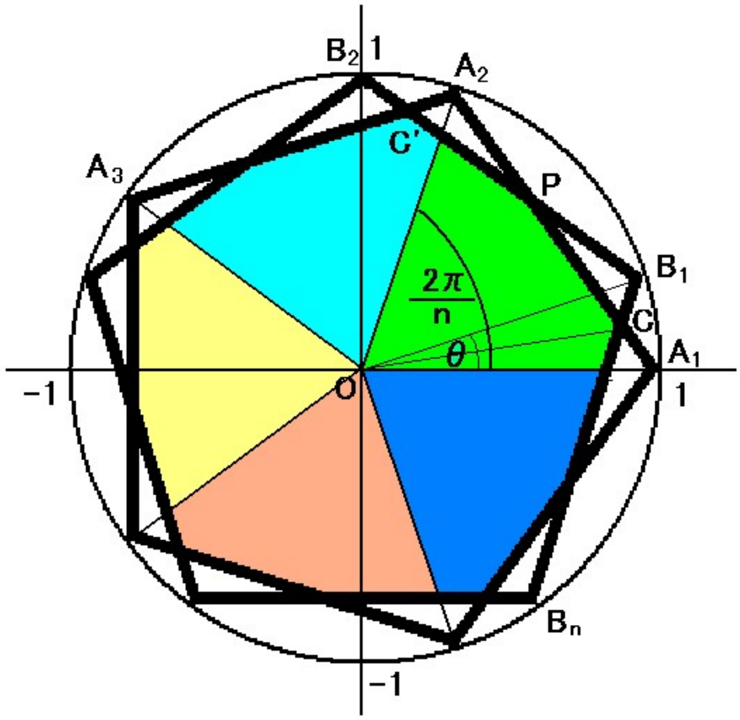
（２）OCの長さを求めよ。

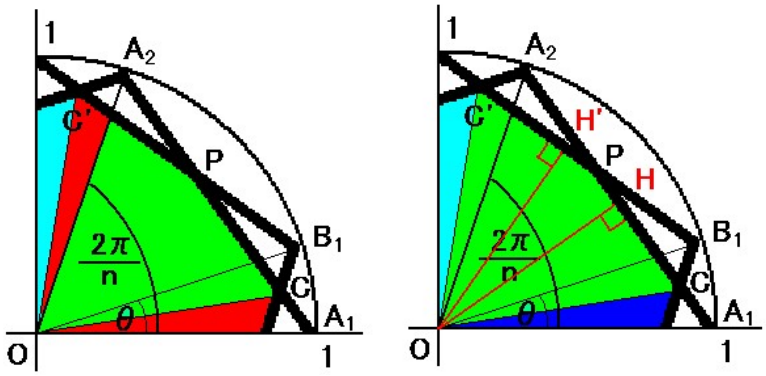
（３）D_nと$D_n{}'$の共通部分の面積$S(\theta)$を求めよ。

（４）$S(\theta)$の最小値$S(\theta_0)$およびθ_0の値をそれぞれ求めよ。

(解答)

（１）





A_1A_2とB_1B_2の交点をP、A_2A_3とB_1B_2の交点をC'、OからA_1A_2, B_1B_nに下ろした垂線の足をそれぞれH, H'とすると、θだけ回転しているので、$\angle HOH' = \theta$である。

$\angle A_1OC=\alpha$ とおくと、$\triangle OA_1A_2$ は $OA_1=OA_2$ の二等辺三角形であるので H は A_1A_2 の中点となり、$\angle A_1OH=\dfrac{\pi}{n}$ である。対称性より、$\angle A_2OC'=\alpha$ である。同様にして、

$\triangle OB_1B_2$ は $OB_1=OB_2$ の二等辺三角形であるので H' は B_1B_2 の中点となり、$\angle B_2OH'=\dfrac{\pi}{n}$ となる。$\angle HOH'=\theta$、$OH=OH'$ より $\triangle OHH'$ は二等辺三角形であり、OP は $\angle HOH'$ を二等分する（OH を半径とする内接円に OH' も半径となり、角の二等分線になる）ので、$\angle POH=\dfrac{\theta}{2}$ となる。よって、$\angle POG=\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{\theta}{2}-\alpha=\dfrac{1}{2}\angle COC'=\dfrac{\pi}{n}$ より、$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ であるから、$\angle A_1OC=\dfrac{\theta}{2}$

（2）$OH=OA_1\cos\dfrac{\pi}{n}=\cos\dfrac{\pi}{n},\ \cos\left(\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{OH}{OC}\Leftrightarrow OC=\dfrac{OH}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{n}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\theta}{2}\right)}$

（3）$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{OH}{OP}\Leftrightarrow OP=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$ であり、

四角形 $OCPC'$ は線分 OP に関して対称であるので面積は $2\times\triangle OCP$ となる。よって、
$S(\theta)=n\times$（四角形 $OCPC'$）$=2n\times\triangle OCP$ である。

$$\triangle OCP=\triangle OCH+\triangle OPH=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot OH\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot OP\cdot OH\cdot\sin\frac{\theta}{2}$$

ここで、$OC=\dfrac{OH}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\theta}{2}\right)},\ OP=\dfrac{OH}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$ より、

$$\triangle OCP=\frac{1}{2}OH^2\left\{\tan\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)+\tan\frac{\theta}{2}\right\}=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{n}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)+\tan\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$S(\theta)=n\cos^2\frac{\pi}{n}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)+\tan\frac{\theta}{2}\right\}$$

（4）$f(\theta)=\left\{\tan\left(\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\theta}{2}\right)+\tan\dfrac{\theta}{2}\right\}$ とおくと、

$$f'(\theta)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$f'(\theta)=0\Leftrightarrow\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{n}-\frac{\theta}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{n}$$

$f'(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ の前後で正から負にただ一度だけ符号変化し、$f(0)=f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)=\tan\dfrac{\pi}{n}$

であるので $f'(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ のとき最小値 $f\left(\dfrac{\pi}{n}\right)=2\tan\dfrac{\pi}{2n}$ をとるので、最小値 $S(\theta_0)$ は

$S(\theta_0)=2n\cos^2\dfrac{\pi}{n}\cdot\tan\dfrac{\pi}{2n}$ であり、$\theta_0=\dfrac{\pi}{n}$ である。