$\triangle ABC$は鋭角三角形である。辺BC,CA,ABの中点をそれぞれP,Q,Rとし、長さをそれぞれa,b,cとする。

（1）$\triangle ABC$の面積Sを、a,b,cを用いて表せ。

（2）$\triangle ABC$を線分PQ,QR,RPで折り曲げて得られる四面体の体積Vを、a,b,cを用いて表せ。

（3）$\triangle ABC$の3辺の和が一定のとき、Vを最大にする四面体は正四面体であることを示せ。

（4）$\triangle ABC$の面積が一定のとき、Vを最大にする四面体は正四面体であることを示せ。

（解答）

（1）三角形の面積の公式より、

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A\cdots①$$

余弦定理より、

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$0<A<\pi$より、$\sin A>0$であるから、

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$

これを①に代入して

$$S=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

ここで、

$$1+\cos A=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$
$$1-\cos A=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

よって、

$$S=\frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}\cdot\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}}$$
$$=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

（2）$\triangle ABC$は鋭角三角形であるので、$a^2+b^2>c^2,b^2+c^2>a^2,c^2+a^2>b^2$が成り立つ。

そこで、$x=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}},y=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}},z=\sqrt{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}}$とおき、

x,y,zを3辺の長さとする直方体$DEFG-HIJK$をつくるとき、この3つの対角線の

長さが$\sqrt{x^2+y^2}=b, \sqrt{y^2+z^2}=c, \sqrt{z^2+x^2}=a$の四面体$DFIK$の体積は、直方体$DEFG-HIJK$の体積から4つの三角錐の体積を引けばいいので、

$$xyz-\frac{1}{6}xyz\cdot 4=\frac{1}{3}xyz$$

求める体積はその$\frac{1}{2^3}$であるので

$$V=\frac{1}{24}xyz=\frac{\sqrt{2}}{96}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$$

（3） $p^2=b^2+c^2-a^2=2bc\cos A,$

$q^2=c^2+a^2-b^2=2ca\cos B,$

$r^2=a^2+b^2-c^2=2ab\cos C,$

とおくと、$(pqr)^2=8(xyz)^2$

$$V^2=\left(\frac{1}{24}xyz\right)^2=\frac{1}{24^2\cdot 8}(pqr)^2=\frac{1}{24^2}(abc)^2\cos A\cos B\cos C$$

ここで、$a+b+c=k$とおくと、

$$abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{k^3}{3^3}$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}=\frac{1}{2}\{-\cos C+\cos(A-B)\}$$

$$\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{2}\{-\cos C+\cos(A-B)\}\cos C=-\frac{1}{2}\left(\cos C-\frac{\cos(A-B)}{2}\right)^2+\frac{\cos^2(A-B)}{8}$$

$a=b=c$かつ$\cos C=\frac{\cos(A-B)}{2}, \cos(A-B)=1$より、

$a=b=c$かつ$A=B, \cos C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow A=B=C$

のとき、Vは最大になり、このとき、Vを最大にする四面体は正四面体である。

（4） $s=bc\sin A=ca\sin B=ab\sin C$とおくと、

$$V^2=\frac{1}{24^2}(abc)^2\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{24^2}(abc)^2\frac{\sin A\sin B\sin C}{\tan A\tan B\tan C}$$

$$= \frac{s^3}{24^2} \cdot \frac{1}{\tan A \tan B \tan C}$$

$\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$ より、

$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$

$\Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$ より、

$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$

$\tan A = \tan B = \tan C \Leftrightarrow A = B = C$ のとき、V は最大となるので、

$$V^2 \leq \frac{s^3}{24^2} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

となり、このとき、V を最大にする四面体は正四面体である。