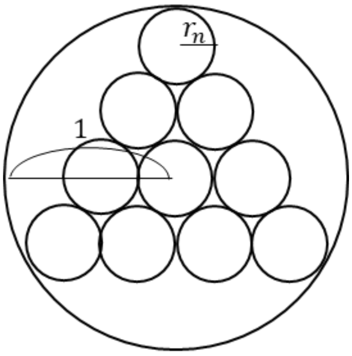
nを自然数とする。半径1の円の内部に半径r_nの円を下図のように上からn段目にn個配置する。



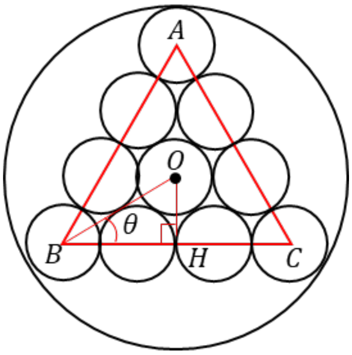
$n=4$の例

（１） r_nを求めよ。

（２）半径r_nの円の面積の総和をS_nとするとき、$\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ。

(解答)

（１） 下図のように外側の円の中心をO, 内部の円の最外周の中心を通る三角形を$\triangle ABC$とし、Oから辺BCに下ろした垂線の足をHとし、$\angle OBH=\theta$とする。



ABの長さをlとするとlは、
2段目から$n-1$段目までの$n-2$個の円の直径と
1段目とn段目の円の半径の和であるので、
$l=2(n-2)r_n+r_n+r_n=2(n-1)r_n \cdots$①
である。

また、$\triangle ABC$は正三角形であるので、$\angle OBH=30^\circ$であるので、

$\theta=30^\circ$より$\cos\theta=\dfrac{BH}{OB}=\dfrac{\frac{l}{2}}{1-r_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるから、$l=\sqrt{3}(1-r_n)\cdots$②

である。
①,②より

$2(n-1)r_n = \sqrt{3}(1-r_n)$

よって、

$r_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2n-2+\sqrt{3}}$

（２） $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \times \pi {r_n}^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2n-2+\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{3n(n+1)}{2\left(2n-2+\sqrt{3}\right)^2}\pi$

$= \dfrac{3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{2\left(2-\dfrac{2+\sqrt{3}}{n}\right)^2}\pi$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{8}\pi$