座標平面上に曲線$C : y^2 - y = x^3 - x + \frac{1}{8}$が存在する。$C$の概形を描け。

（解答）

$y^2 - y = x^3 - x + \frac{1}{8}$より$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = x^3 - x + \frac{3}{8}$であるから、$C$は$y = \frac{1}{2}$に対して対称である。

$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{x^3 - x + \frac{3}{8}}$より

$f(x) = x^3 - x + \frac{3}{8}$とおくと、

$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{13}}{4}\right)$より

$x = -\frac{1+\sqrt{13}}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1-\sqrt{13}}{4}$のとき$f(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

増減表を描くと、

x	$\cdots$	$-\frac{1+\sqrt{13}}{4}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$-\frac{1-\sqrt{13}}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$\frac{3}{8}+\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$\frac{3}{8}-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\uparrow$	0	$\uparrow$

また、$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = x^3 - x + \frac{3}{8}$より$x^3 - x + \frac{3}{8} \geq 0$であるから、$x$の取り得る値の範囲は、

$-\frac{1+\sqrt{13}}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, -\frac{1-\sqrt{13}}{4} \leq x$

$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{f(x)}$より