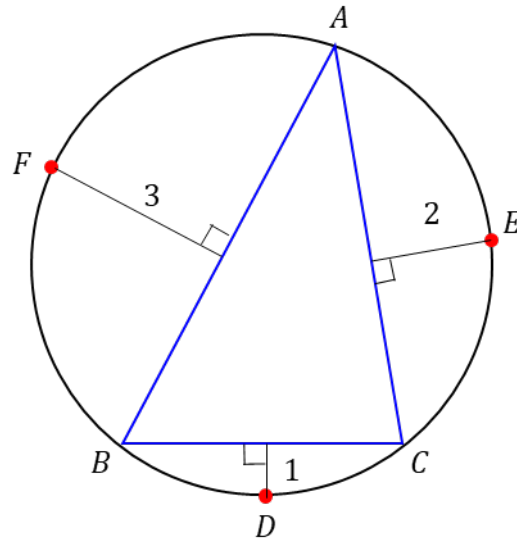


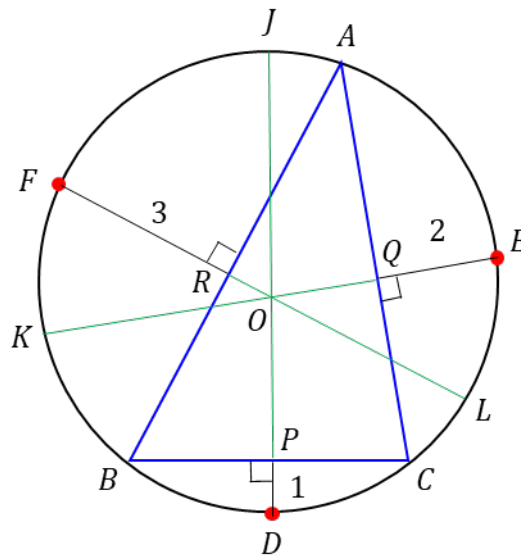
半径 r ($r > 3$) の円に三角形 ABC が内接しており、弧 BC, CA, AB のそれぞれの中点を D, E, F とすると、 D, E, F と辺 BC, CA, AB との距離はそれぞれ $1, 2, 3$ である。



- (1) 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とするとき、 a, b, c を r を用いて表せ。
- (2) 三角形 ABC の面積を S とするとき、 S を r を用いて表せ。
- (3) r の値を求めよ。

(解答)

(1)



円の中心を O とする。

点 D, E, F から辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とし、 DO, EO, FO の延長線上と円周との交点をそれぞれ J, K, L とすると、

$$BP \cdot PC = DP \cdot PJ \text{ より } \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = (2r - 1) \cdot 1 \text{ であるから、 } a = 2\sqrt{2r - 1}$$

$$CQ \cdot QA = EQ \cdot QK \text{ より } \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} = (2r-2) \cdot 2 \text{ であるから、 } b = 2\sqrt{4r-4}$$

$$AR \cdot RB = FR \cdot RL \text{ より } \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = (2r-3) \cdot 3 \text{ であるから、 } c = 2\sqrt{6r-9}$$

$$(2) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4(4r-4) + 4(6r-9) - 4(2r-1)}{2 \cdot 2\sqrt{4r-4} \cdot 2\sqrt{6r-9}} = \frac{2r+3}{\sqrt{r-1}\sqrt{6r-9}}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2r+3}{\sqrt{r-1}\sqrt{6r-9}} \right)^2} = \sqrt{\frac{r}{3(r-1)}}$$

より

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{4r-4} \cdot 2\sqrt{6r-9} \cdot \sqrt{\frac{r}{3(r-1)}} = 4\sqrt{r(2r-3)}$$

$$(3) \sin A = \frac{a}{2r} \text{ より } \sqrt{\frac{r}{3(r-1)}} = \frac{2\sqrt{2r-1}}{2r}$$

両辺を2乗して整理すると、

$$r^3 - 6r^2 + 9r - 3 = 0$$

$r = x + 2$ とおくと。

$$(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 9(x+2) - 3 = 0 \text{ より}$$

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

$x = 2 \cos \theta$ とおくと、

$$8 \cos^3 \theta - 6 \cos \theta - 1 = 0$$

となり、 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ より

$$2 \cos 3\theta - 1 = 0$$

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2} \text{ より } 3\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi \text{ (} n: \text{整数)}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $0 \leq 3\theta \leq 3\pi$ であるから、 $3\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi$ より $\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{5}{9}\pi, \frac{7}{9}\pi$

$$\theta = \frac{\pi}{9} \text{ のとき } r = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{9}$$

$$\theta = \frac{5}{9}\pi \text{ のとき } r = 2 + 2 \cos \frac{5}{9}\pi$$

$$\theta = \frac{7}{9}\pi \text{ のとき } r = 2 + 2 \cos \frac{7}{9}\pi$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} < \cos \frac{\pi}{9} \text{ より } 2 + 2 \cos \frac{\pi}{9} > 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} > 3$$

$$\cos \frac{5}{9} \pi < \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ より } 2 + 2 \cos \frac{5}{9} \pi < 2 + 0 < 3 \text{ より不適}$$

$$\cos \frac{7}{9} \pi < \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ より } 2 + 2 \cos \frac{7}{9} \pi < 2 + 0 < 3 \text{ より不適}$$

$$\text{よって、} r = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{9}$$