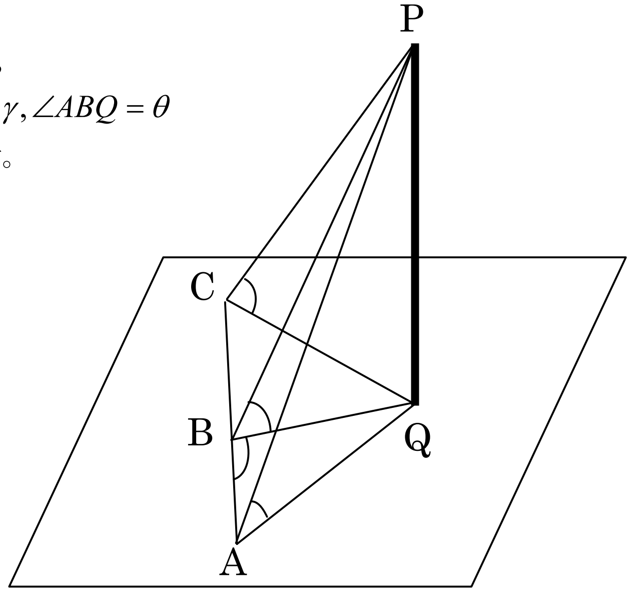
右の図において、$PQ=h, AQ=x, BQ=y, CQ=z,$
$AB=a, BC=b,\ \angle PAQ=\alpha, \angle PBQ=\beta, \angle PCQ=\gamma, \angle ABQ=\theta$
とする。このとき、hを、a,b,α,β,γを用いて表せ。
ただし、点A,B,Cは同一直線上に存在する。



（解答）

$\triangle APQ, \triangle BPQ, \triangle CPQ$より、$x=\dfrac{h}{\tan\alpha}\cdots$①$, y=\dfrac{h}{\tan\beta}\cdots$②$, z=\dfrac{h}{\tan\gamma}\cdots$③

$\triangle ABQ$に余弦定理を用いて、$x^2=a^2+y^2-2ay\cos\theta\cdots$④

$\triangle BCQ$に余弦定理を用いて、$z^2=b^2+y^2-2by\cos(\pi-\theta)=b^2+y^2+2by\cos\theta\cdots$⑤

④$\times b+$⑤$\times a$より、$x^2b+z^2a=a^2b+ab^2+y^2b+y^2a=ab(a+b)+y^2(a+b)\cdots$⑥

⑥に①,②,③を代入して整理すると、$h^2\left(\dfrac{b}{\tan^2\alpha}+\dfrac{a}{\tan^2\gamma}-\dfrac{a+b}{\tan^2\beta}\right)=ab(a+b)$

$$\frac{b}{\tan^2\alpha}+\frac{a}{\tan^2\gamma}-\frac{a+b}{\tan^2\beta}=\frac{b\tan^2\gamma(\tan^2\beta-\tan^2\alpha)+a\tan^2\alpha(\tan^2\beta-\tan^2\gamma)}{\tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma}\neq 0$$

$(\because A,B,C$は同一直線上に存在するので、$\alpha\neq\beta, \beta\neq\gamma)$より、

$$h^2=\frac{ab(a+b)}{\dfrac{b}{\tan^2\alpha}+\dfrac{a}{\tan^2\gamma}-\dfrac{a+b}{\tan^2\beta}}$$

$h>0$より、$h=\sqrt{\dfrac{ab(a+b)}{\dfrac{b}{\tan^2\alpha}+\dfrac{a}{\tan^2\gamma}-\dfrac{a+b}{\tan^2\beta}}}$