1辺の長さが1である正5角形$ABCDE$の中に点P,Q,Rを次の条件を満たすようにとる。

$$\angle APQ=\angle APR=\angle BQC=\angle BQP=\angle ERP=\angle ERD=120^\circ$$

（1） $L=AP+BQ+CQ+DR+ER+PQ+PR$の長さを求めよ。

（2） $L<4$であることを示せ。ただし、$\sqrt{3}<1.74, 2.23<\sqrt{5}<2.24, \sqrt{0.54}<0.74$であることを用いても良い。

(解答)

（1）

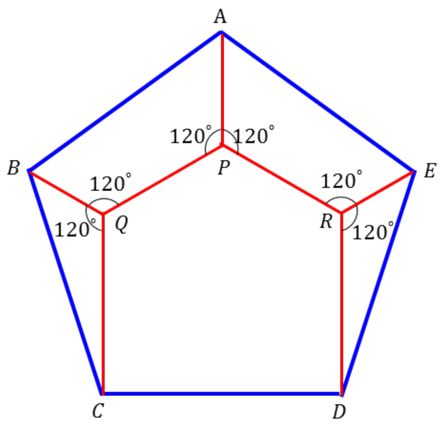

図 1

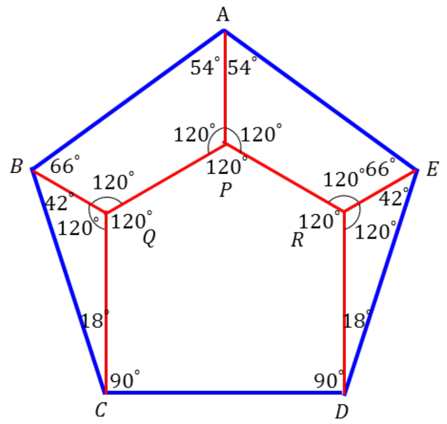

図 2

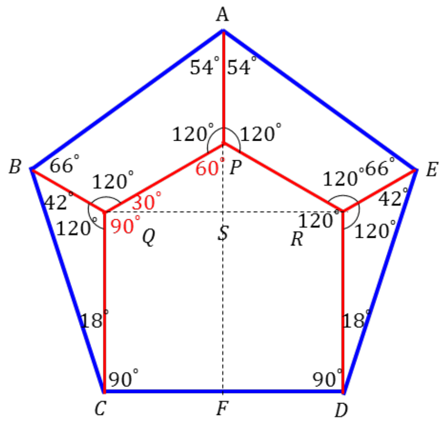

図 3

条件より図1のようになり、角度は図2のようになる。

$\dfrac{BC}{\sin 120^\circ}=\dfrac{BQ}{\sin 18^\circ}=\dfrac{CQ}{\sin 42^\circ}$より、

$BQ=\sin 18^\circ\dfrac{BC}{\sin 120^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin 18^\circ, CQ=\sin 42^\circ\dfrac{BC}{\sin 120^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin 42^\circ$

図3のように点Pから線分QR,CDに下ろした垂線の足をそれぞれS,Fとすると、

$\cos 30^\circ=\dfrac{QS}{PQ}=\dfrac{\frac{1}{2}CD}{PQ}$より、$PQ=\dfrac{\frac{1}{2}CD}{\cos 30^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$\tan 30^\circ=\dfrac{PS}{QS}=\dfrac{PS}{\frac{1}{2}CD}$より、$PS=\tan 30^\circ\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$,

$\angle CAF=\dfrac{1}{2}\angle CAF=\dfrac{1}{6}\angle BAE=18^\circ$より、$\tan 18^\circ=\dfrac{CF}{AF}$であるから、$AF=\dfrac{1}{2\tan 18^\circ}$

$AP=AF-FS-PS=AF-CQ-PS=\dfrac{1}{2\tan 18^\circ}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin 42^\circ-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$BQ=ER, PQ=PR, CQ=DQ$より、

$L=AP+2BQ+2CQ+2PQ$となるから、

$$L=\frac{1}{2\tan 18^\circ}-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 42^\circ-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}\sin 18^\circ+\frac{4}{\sqrt{3}}\sin 42^\circ+\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2\tan 18^\circ}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin 42^\circ+2\sin 18^\circ\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta=18^\circ$とおくと、$5\theta=90^\circ$より、$3\theta=90^\circ-2\theta$

$\cos 3\theta=\cos\left(90^\circ-2\theta\right)=\sin 2\theta$より、

$$-3\cos\theta+4\cos^3\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$-3+4\cos^2\theta=2\sin\theta$$
$$-3+4\left(1-\sin^2\theta\right)=2\sin\theta$$
$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$$
$$\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\sin\theta>0$より、$\sin\theta=\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 18^\circ=\frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}=\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\sqrt{5-\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(-1+\sqrt{5}\right)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 42^\circ=\sin\left(60^\circ-18^\circ\right)=\sin 60^\circ\cos 18^\circ-\cos 60^\circ\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8}$$

よって、

$$L=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(7+3\sqrt{5}\right)\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}$$

（2）

$$\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(7+3\sqrt{5}\right)\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}<\frac{1.74\left(1+2.24\right)+\left(7+3\cdot 2.24\right)\sqrt{5-2\cdot 2.23}}{4}=\frac{5.6376+13.72\sqrt{0.54}}{4}$$
$$<\frac{5.6376+13.72\cdot 0.74}{4}=3.9476<4$$