

n を正の整数とする。ある円が存在し、その円の周上に n 個の点が存在する。その中の2個ずつの点を全て結んだときに分けられる領域の数を $A(n)$ とする。ただし、3本の線分が1点で交わることはないものとする。

(1) $A(1), A(2), A(3), A(4), A(5)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $A(n)$ を求めよ。

(解答)

(2) ある点からある点に向かって線を引く場合について考える。

円は既に引いてある線と交わると領域が1つ増え、点と点を結ぶと1つ増える。

最初に領域が1つ存在するので、領域の数は、 $1 + (\text{線分の数}) + (\text{交点の数})$ で求められる。

線分の数は、 ${}_n C_2$ である。

交点の数は4点選んで四角形を作り、その対角線の個数と1:1に対応するので ${}_n C_4$ である。

よって、 $A(n) = 1 + {}_n C_2 + {}_n C_4$ である。

(1) $A(1) = 1,$

$$A(2) = 1 + {}_2 C_2 = 2,$$

$$A(3) = 1 + {}_3 C_2 = 4,$$

$$A(4) = 1 + {}_4 C_2 + {}_4 C_4 = 8,$$

$$A(5) = 1 + {}_5 C_2 + {}_5 C_4 = 16,$$