n を自然数とし、$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^k$ で定義する。S_{2023} を 5 で割ったときのあまりを求めよ。

（解答）

以下、合同式は $\bmod 5$ で考える。

$2024 = 5 \times 404 + 3$ より

$$S_{2023} = \sum_{k=1}^{2023} k^k = \sum_{l=1}^{405}(5l-4)^{5l-4} + \sum_{l=1}^{405}(5l-3)^{5l-3} + \sum_{l=1}^{405}(5l-2)^{5l-2} + \sum_{l=1}^{404}(5l-1)^{5l-1} + \sum_{l=1}^{404}(5l)^{5l}$$

$$\equiv \sum_{l=1}^{405} 1^{5l-4} + \sum_{l=1}^{405} 2^{5l-3} + \sum_{l=1}^{405}(-2)^{5l-2} + \sum_{l=1}^{404}(-1)^{5l-1} + \sum_{l=1}^{404} 0^{5l}$$

$$\sum_{l=1}^{405} 1^{5l-4} = 405 \equiv 0$$

$$\sum_{l=1}^{405} 2^{5l-3} = \sum_{l=1}^{405} 2^{4l+l-3} = \sum_{l=1}^{405} 16^{l-1} \cdot 2^{l+1} \equiv \sum_{l=1}^{405} 1^{l-1} \cdot 2^{l+1} = \sum_{l=1}^{405} 2^{l+1}$$

$$= \sum_{m=1}^{102} 2^{4m-3+1} + \sum_{m=1}^{101} 2^{4m-2+1} + \sum_{m=1}^{101} 2^{4m-1+1} + \sum_{m=1}^{101} 2^{4m+1}$$

$$= \sum_{m=1}^{102} 16^{m-1} \cdot 2^2 + \sum_{m=1}^{101} 16^{m-1} \cdot 2^3 + \sum_{m=1}^{101} 16^m + \sum_{m=1}^{101} 16^{m-2} \cdot 2^1$$

$$\equiv \sum_{m=1}^{102}(-1) + \sum_{m=1}^{101}(-2) + \sum_{m=1}^{101} 1 + \sum_{m=1}^{101} 2$$

$$= -1 + \sum_{m=1}^{101}(-1-2+1+2)$$

$$= -1$$

$$\sum_{l=1}^{405}(-2)^{5l-2} = \sum_{l=1}^{405}(-2)^{4l+l-2} = \sum_{l=1}^{405} 16^{l-1} \cdot (-2)^{l+2} \equiv \sum_{l=1}^{405} 1^{l-1} \cdot (-2)^{l+2} = \sum_{l=1}^{405}(-2)^{l+2}$$

$$= \sum_{m=1}^{102}(-2)^{4m-3+2} + \sum_{m=1}^{101}(-2)^{4m-2+2} + \sum_{m=1}^{101}(-2)^{4m-1+2} + \sum_{m=1}^{101}(-2)^{4m+2}$$

$$= \sum_{m=1}^{102} 16^{m-1} \cdot (-2)^3 + \sum_{m=1}^{101} 16^m + \sum_{m=1}^{101} 16^m \cdot (-2)^1 + \sum_{m=1}^{101} 16^{m-2} \cdot (-2)^2$$

$$\equiv \sum_{m=1}^{102} 2 + \sum_{m=1}^{101} 1 + \sum_{m=1}^{101} (-2) + \sum_{m=1}^{101} (-1)$$

$$= 2 + \sum_{m=1}^{101} (2 + 1 - 2 - 1)$$

$$= 2$$

$$\sum_{l=1}^{404} (-1)^{5l-1} = \sum_{l=1}^{404} (-1)^{4l+l-1} = \sum_{l=1}^{404} (-1)^{l-1} = \sum_{l=1}^{202} (1-1) = 0$$

$$\sum_{l=1}^{404} 0^{5l} = 0$$

よって、$S_{2023} \equiv 0 - 1 + 2 + 0 + 0 = 1$ より S_{2023} を 5 で割ったときのあまりは1