数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{d_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$を次のように定義する。

$a_n=2^n, b_n=3^n, c_n=5^n$, $d_n$:数列$a_n,b_n,c_n$のすべての項を小さい方から順に並べた数列

必要であれば、$0.3010<\log_{10}2<0.3011$, $0.4771<\log_{10}3<0.4772$であることを用いても良い。

（１） $d_n$において初めて$1000$を超えるものは何番目に登場するかを答えよ。

（２） $d_{1000}$は$a_n,b_n,c_n$のどの数列の項の何番目に登場する項かを答えよ。

(解答)

（１） $a_9=2^9=512, a_{10}=2^{10}=1024,$

$b_6=3^6=729, b_7=3^7=2187,$

$c_4=5^4=625, c_5=5^5=3125,$

より、$a_9<c_4<b_6<1000<a_{10}<b_7<a_{11}<\cdots$であるから、

$a_{10}$が初めて$1000$を超えるものであり、それまでに$a_1$から$a_9$、$b_1$から$b_6$、$c_1$から$c_4$が存在するので、$d_n$において初めて$1000$を超えるものは$9+6+4+1=20$番目に登場する。

（２） $m$を自然数とする。$d_n\leq m$を満たす$a_n,b_n,c_n$の個数は、

$2^n\leq m, 3^n\leq m, 5^n\leq m$より$n\leq\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}2}, n\leq\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}3}, n\leq\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}5}$となるから、

$a_n,b_n,c_n$がそれぞれ$\left[\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}2}\right],\left[\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}3}\right],\left[\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}5}\right]$個ずつ登場する…①

（[ ]はガウス記号）

$\left[\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}2}\right]+\left[\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}3}\right]+\left[\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}5}\right]\leq 1000$を満たす最大の自然数$m$を求めると、

$$\frac{\log_{10}m}{\log_{10}2}-1<\left[\frac{\log_{10}m}{\log_{10}2}\right]\leq\frac{\log_{10}m}{\log_{10}2}$$

$$\frac{\log_{10}m}{\log_{10}3}-1<\left[\frac{\log_{10}m}{\log_{10}3}\right]\leq\frac{\log_{10}m}{\log_{10}3}$$

$$\frac{\log_{10}m}{\log_{10}5}-1<\left[\frac{\log_{10}m}{\log_{10}5}\right]\leq\frac{\log_{10}m}{\log_{10}5}$$

より

$\dfrac{m}{\log_{10}2}+\dfrac{m}{\log_{10}3}+\dfrac{m}{\log_{10}5}<1003$を満たす最大の$m$の値は、

$$m \le \frac{1003}{\frac{1}{\log_{10} 2}+\frac{1}{\log_{10} 3}+\frac{1}{\log_{10} 5}} < \frac{1003}{\frac{1}{0.3011}+\frac{1}{0.4772}+\frac{1}{0.6990}}$$

$$< \frac{1003}{3.321+2.095+1.430} < 146.51$$

より $m=146$

$\log_{10} 5 = 1-\log_{10} 2$ より $1-0.3011 < \log_{10} 5 < 1-0.3010$ となるので、

$0.6989 < \log_{10} 5 < 0.6990$

$$484 = \left[\frac{146}{0.3011}\right] \le \left[\frac{146}{\log_{10} 2}\right] \le \left[\frac{146}{0.301}\right] = 485$$

$$305 = \left[\frac{146}{0.4772}\right] \le \left[\frac{146}{\log_{10} 3}\right] \le \left[\frac{146}{0.4771}\right] = 306$$

$$208 = \left[\frac{146}{0.6990}\right] \le \left[\frac{146}{\log_{10} 5}\right] \le \left[\frac{146}{0.6989}\right] = 208$$

より $484+305+208=997$ であるから、

$d_n$ の小さい方から $997$ 個が $2^p\left(1 \le p \le 484\right)$, $3^q\left(1 \le q \le 305\right)$, $5^r\left(1 \le r \le 208\right)$ であり、

$145.985 < 485\log_{10} 2 < 146.0335$

$145.9996 < 306\log_{10} 3 < 146.0232$

$146.286 < 486\log_{10} 2 < 146.3346$

$146.4697 < 307\log_{10} 3 < 146.5004$

$146.0701 < 209\log_{10} 5 < 146.091$

より

$2^{485}$ と $3^{306}$ が $998$ 番目と $999$ 番目のどちらかになり、

$5^{209} < 2^{486} < 3^{307}$ より $1000$ 番目は $5^{209}$ になる。

よって、$d_{1000} = 5^{209} = c_{209}$ である。

$$\frac{1}{\log_{10} 2} : \frac{1}{\log_{10} 3} : \frac{1}{\log_{10} 5}$$