すべて自然数の項のみからなる数列$\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$が存在する。数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_n $(n=1,2,3,\cdots)$とするとき、S_nは次の関係式を満たしている。

$$S_nS_{n+1}+S_n+S_{n+1}=35\ (n\geq 1)$$

このような数列をすべて求めよ。

（解答）

$S_nS_{n+1}+S_n+S_{n+1}=35\cdots$①とする。

①より$(S_n+1)(S_{n+1}+1)=36$

a_nの項はすべて自然数で$S_n<S_{n+1}$となるので、

$(S_n+1,S_{n+1}+1)=(2,18),(3,12),(4,9)$より$(S_n,S_{n+1})=(1,17),(2,11),(3,8)$

$(S_n,S_{n+1})=(1,17)$のとき

$S_1=a_1=1,S_2=a_1+a_2=17$より$a_1=1,a_2=16$である数列

$(S_n,S_{n+1})=(2,11)$のとき

$S_1=a_1=2,S_2=a_1+a_2=11$より$a_1=2,a_2=9$である数列

$S_2=a_1+a_2=2,S_3=a_1+a_2+a_3=11$より$a_1=1,a_2=1,a_3=9$である数列

$(S_n,S_{n+1})=(3,8)$のとき

$S_1=a_1=3,S_2=a_1+a_2=8$より$a_1=3,a_2=5$である数列

$S_2=a_1+a_2=3,S_3=a_1+a_2+a_3=8$より$a_1=1,a_2=2,a_3=5,$または

$a_1=2,a_2=1,a_3=5$である数列

$S_3=a_1+a_2+a_3=3,S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=8$より$a_1=1,a_2=1,a_3=1,a_4=5$である数列

よって、

$(a_1,a_2)=(1,16),(2,9),(3,5),(a_1,a_2,a_3)=(1,1,9),(1,2,5),(2,1,5),(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,1,1,5)$

である数列