次のように定義される数列$\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$の一般項を求めよ。

$$a_1=6, a_2=216,\ a_{n+2}a_n=3\left(2+\frac{1}{2n+2}\right){a_{n+1}}^2\ (n\geq 1)$$

（解答）

$a_{n+2}a_n=3\left(2+\frac{1}{2n+2}\right){a_{n+1}}^2\cdots$（＊）とする。

$a_1=6, a_2=216$ より a_n は帰納的に $a_n>0$ が成り立つ。

（＊）の両辺を $(2n+4)a_{n+1}a_n$ で割ると、$\frac{a_{n+2}}{2(n+2)a_{n+1}}=\frac{3a_{n+1}}{2(n+1)a_n}\cdots$①

$b_n=\frac{a_{n+1}}{2(n+1)a_n}$ とおくと、$b_1=\frac{a_2}{2\cdot 2\cdot a_1}=\frac{216}{2\cdot 2\cdot 6}=9, b_{n+1}=3b_n\cdots$②

②より $b_n=3^{n-1}b_1=3^{n+1}\ (n\geq 1)$

$\frac{a_{n+1}}{2(n+1)a_n}=3^{n+1}$ より $a_{n+1}=2\cdot 3^{n+1}(n+1)a_n$ となり、

$a_n=2\cdot 3^n na_{n-1}$

$=2\cdot 3^n n\cdot 2\cdot 3^{n-1}(n-1)a_{n-2}$

$=2\cdot 3^n n\cdot 2\cdot 3^{n-1}(n-1)\cdot 2\cdot 3^{n-2}(n-2)a_{n-3}$

：

$=2\cdot 3^n n\cdot 2\cdot 3^{n-1}(n-1)\cdot 2\cdot 3^{n-2}(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 3^2\cdot 2\cdot a_1$

$=2\cdot 3^n n\cdot 2\cdot 3^{n-1}(n-1)\cdot 2\cdot 3^{n-2}(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 3^2\cdot 2\cdot 6$

$=2^n\cdot 3^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot n!\ (n\geq 1)$