l,m,n を自然数とし、$a(l,m,n)\ (l=1,2,\cdots,m=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots)$ を次のように定義する。

$$a(1,1,1)=18,$$
$$a(l+1,m,n)=a(l,m,n)+2l+3m+4n+1$$
$$a(l,m+1,n)=a(l,m,n)+3l+4m+5n+2$$
$$a(l,m,n+1)=a(l,m,n)+4l+5m+6n+3$$
$$(l\geq 1,m\geq 1,n\geq 1)$$

（１） $a(2,2,2)$ の値を求めよ。

（２） $a(l,m,n)$ を l,m,n の式で表せ。

（３） $a(l,m,n)=1000$ となる (l,m,n) の組をすべて求めよ

(解答)

（１） $a(l+1,m,n)=a(l,m,n)+2l+3m+4n+1\cdots$①

$a(l,m+1,n)=a(l,m,n)+3l+4m+5n+2\cdots$②

$a(l,m,n+1)=a(l,m,n)+4l+5m+6n+3\cdots$③

①に $l=m=n=1$ を代入すると、

$a(2,1,1)=a(1,1,1)+2\cdot1+3\cdot1+4\cdot1+1$ より $a(2,1,1)=28$

②に $l=2,m=n=1$ を代入すると、

$a(2,2,1)=a(2,1,1)+3\cdot2+4\cdot1+5\cdot1+2$ より $a(2,2,1)=45$

③に $l=m=2,n=1$ を代入すると、

$a(2,2,2)=a(2,2,1)+4\cdot2+5\cdot2+6\cdot1+3$ より $a(2,2,2)=72$

（２） $a(l+1,m,n)-a(l,m,n)=2l+3m+4n+1$ より、

$$a(l,m,n)=a(1,m,n)+2\sum_{i=1}^{l-1}i+(3m+4n+1)\sum_{i=1}^{l-1}1$$
$$=a(1,m,n)+l(l-1)+(3m+4n+1)(l-1)$$
$$=a(1,m,n)+(l+3m+4n+1)(l-1)$$

$m=n=1$ とすると、

$$a(l,1,1)=a(1,1,1)+(l+8)(l-1)$$
$$=18+(l+8)(l-1)$$
$$=(l+2)(l+5)$$

$a(l,m+1,n)-a(l,m,n)=3l+4m+5n+2$ より、

$$a(l,m,n)=a(l,1,n)+4\sum_{j=1}^{m-1}j+(3l+5n+2)\sum_{j=1}^{m-1}1$$
$$=a(l,1,n)+2m(m-1)+(3l+5n+2)(m-1)$$

$n=1$ とすると、

$$a(l,m,1)=a(l,1,1)+2m(m-1)+(3l+7)(m-1)$$
$$=(l+2)(l+5)+(3l+2m+7)(m-1)$$
$$=(l+m+1)(l+2m+3)$$

$a(l,m,n+1)-a(l,m,n)=4l+5m+6n+3$ より、

$$a(l,m,n)=a(l,m,1)+6\sum_{k=1}^{n-1}k+(4l+5m+3)\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=(l+m+1)(l+2m+3)+3n(n-1)+(4l+5m+3)(n-1)$$
$$=(l+m+n)(l+2m+3n)$$

（３） $a(l,m,n)=1000$ より、

$(l+m+n)(l+2m+3n)=2^3\cdot 5^3\cdots$（＊）

$3\le l+m+n<l+2m+3n<3(l+m+n)\cdots$（☆）が成り立つ。
$l+m+n=x, l+2m+3n=y$ とおくと、
（＊）より、$3\le x<y<3x, xy=1000$ となり、

$x<\dfrac{1000}{x}<3x$ が成り立つ。

各不等式より、$\sqrt{\dfrac{1000}{3}}<x<\sqrt{1000}$ が成り立つ。

$18=\sqrt{324}<\sqrt{333}<\sqrt{\dfrac{1000}{3}}, \sqrt{1000}<\sqrt{1024}=32$
より、$18\le x\le 32$ が成り立つ。

これを満たす x の値は、$x=2^2\cdot 5, 5^2$ のみであるので、

$(l+m+n, l+2m+3n)$ の組み合わせは、
（＊）より、$(l+m+n, l+2m+3n)=(20,50),(25,40)$ のみが考えられる。
（ｉ）$(l+m+n, l+2m+3n)=(20,50)$ のとき

$$\begin{cases} l+m+n=20\cdots[1] \\ l+2m+3n=50\cdots[2] \\ l\ge 1, m\ge 1, n\ge 1\cdots[3] \end{cases}$$

を満たす自然数 (l,m,n) の組を求めれば良い。
$[2]-[1]$ より
$m+2n=30\cdots[4]$
$n=p$ $(p:$ 自然数 $)$ とすると、$[4]$ より $m=30-2p\cdots[5]$ が成り立つ。
$n=p$ 、$[5]$ を $[1]$ に代入して
$l+30-2p+p=20\Leftrightarrow l=p-10\cdots[6]$

$[3],[5],[6]$ より $\begin{cases} 1\le l=p-10\le 20\cdots[7] \\ 1\le m=30-2p\le 20\cdots[8] \\ 1\le n=p\le 20\cdots[9] \end{cases}$

が成り立つ。

$[7],[8],[9]$より$11 \le p \le 14$

$(l,m,n)=(p-10,30-2p,p)(11 \le p \le 14)$ $(p$:自然数 $)$

$p-10=q$とおいて、$(l,m,n)=(q,10-2q,q+10)(1 \le q \le 4)$ $(q$:自然数 $)$

（ⅱ）$(l+m+n,l+2m+3n)=(25,40)$のとき

$$\begin{cases} l+m+n=25 \cdots [10] \\ l+2m+3n=40 \cdots [11] \\ l \ge 1, m \ge 1, n \ge 1 \cdots [12] \end{cases}$$

を満たす自然数(l,m,n)の組を求めれば良い。

$[11]-[10]$より

$m+2n=15 \cdots [13]$

$n=p$ $(p$:自然数 $)$とすると、$[13]$より$m=15-2p \cdots [14]$が成り立つ。

$n=p$、$[14]$を$[10]$に代入して

$l+15-2p+p=25 \Leftrightarrow l=p+10 \cdots [15]$

$[12],[14],[15]$より$\begin{cases} 1 \le l = p+10 \le 25 \cdots [16] \\ 1 \le m = 15-2p \le 25 \cdots [17] \\ 1 \le n = p \le 25 \cdots [18] \end{cases}$

が成り立つ。

$[16],[17],[18]$より$1 \le p \le 7$

$(l,m,n)=(p+10,15-2p,p)(1 \le p \le 7)$ $(p$:自然数 $)$

以上、（ⅰ）（ⅱ）より

$(l,m,n)=(p,10-2p,p+10)(1 \le p \le 4)$

$\qquad (p+10,15-2p,p)(1 \le p \le 7)$

の11組。