m を2以上の自然数とする。$a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots + \frac{1}{m^n}$ のとき $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ を求めよ。

（解答）

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots + \frac{1}{m^n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n} + \cdots + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k^n} = \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n-1}} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$ より

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$$