a,b,c を相異なる素数、n を自然数とし、数列 $\{x_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を次のように定義する。

$$x_1=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}},\ x_{n+1}=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{cx_n}}}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

（1） $x_n=a^{p_n}b^{q_n}c^{r_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき、p_1,q_1,r_1,p_2,q_2,r_2 の値をそれぞれ求めよ。

（2） p_n,q_n,r_n $(n=1,2,3,\cdots)$ をそれぞれ n の式で表せ。

（3） $\lim_{n\to\infty}x_n=a^pb^qc^r$ とするとき、p,q,r の値をそれぞれ求めよ。

(解答)

（1） $x_1=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}=\sqrt{a\sqrt{bc^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{ab^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{8}}$

より、$p_1=\frac{1}{2},q_1=\frac{1}{4},r_1=\frac{1}{8}$

$x_2=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{cx_1}}}=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{ca^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{8}}}}}=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}c^{1+\frac{1}{8}}}}}=\sqrt{a\sqrt{ba^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}}}}$

$=\sqrt{a\sqrt{a^{\frac{1}{4}}b^{1+\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}}}}=\sqrt{a^{1+\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}}c^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}}b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{32}}c^{\frac{1}{8}+\frac{1}{64}}=a^{\frac{9}{16}}b^{\frac{9}{32}}c^{\frac{9}{64}}$

より、$p_2=\frac{9}{16},q_2=\frac{9}{32},r_2=\frac{9}{64}$

（2） $x_{n+1}=a^{p_{n+1}}b^{q_{n+1}}c^{r_{n+1}}=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{cx_n}}}=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{ca^{p_n}b^{q_n}c^{r_n}}}}=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a^{p_n}b^{q_n}c^{r_n+1}}}}$

$=\sqrt{a\sqrt{ba^{\frac{1}{2}p_n}b^{\frac{1}{2}q_n}c^{\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{2}}}}=\sqrt{a\sqrt{a^{\frac{1}{2}p_n}b^{\frac{1}{2}q_n+1}c^{\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{2}}}}=\sqrt{aa^{\frac{1}{4}p_n}b^{\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}r_n+\frac{1}{4}}}$

$=\sqrt{a^{\frac{1}{4}p_n+1}b^{\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}r_n+\frac{1}{4}}}=a^{\frac{1}{8}p_n+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{8}q_n+\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{8}r_n+\frac{1}{8}}$

より、$p_{n+1}=\frac{1}{8}p_n+\frac{1}{2},q_{n+1}=\frac{1}{8}q_n+\frac{1}{4},r_{n+1}=\frac{1}{8}r_n+\frac{1}{8}$

$p_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{4}{7}\right),q_{n+1}-\frac{2}{7}=\frac{1}{8}\left(q_n-\frac{2}{7}\right),r_{n+1}-\frac{1}{7}=\frac{1}{8}\left(r_n-\frac{1}{7}\right)$ より

$p_n=\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{8^n}\right),q_n=\frac{2}{7}\left(1-\frac{1}{8^n}\right),r_n=\frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{8^n}\right)$

（3） $p=\lim_{n\to\infty}p_n,q=\lim_{n\to\infty}q_n,r=\lim_{n\to\infty}r_n$ であり、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8^n}=0$ より

$p=\frac{4}{7},q=\frac{2}{7},r=\frac{1}{7}$