$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^8 + k^4 + 1} \ (n = 1,2,3,\cdots)$とする。

（１） $a_n \ (n \geq 1)$を求めよ。

（２） $S_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k$ とするとき、$S_n \ (n \geq 1)$を求めよ。

(解答)

（１） $\frac{k^2}{k^8 + k^4 + 1} = \frac{k^2}{k^8 + 2k^4 + 1 - k^4} = \frac{k^2}{(k^4 + 1)^2 - k^4} = \frac{k^2}{(k^4 + k^2 + 1)(k^4 - k^2 + 1)}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^4 - k^2 + 1} - \frac{1}{k^4 + k^2 + 1}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k^2(k^2 - 1) + 1} - \frac{1}{(k^2 + 1)k^2 + 1}\right\}$$

より、

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k^2(k^2 - 1) + 1} - \frac{1}{(k^2 + 1)k^2 + 1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1^2(1^2 - 1) + 1} - \frac{1}{(n^2 + 1)n^2 + 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^4 + n^2 + 1}\right)$$

（２） $S_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{k^4 + k^2 + 1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{k}{k^4 + 2k^2 + 1 - k^2} = \frac{k}{(k^2 + 1)^2 - k^2} = \frac{k}{(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k - 1) + 1} - \frac{1}{(k + 1)k + 1}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)}{4}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k - 1) + 1} - \frac{1}{(k + 1)k + 1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1(1 - 1) + 1} - \frac{1}{(n + 1)n + 1}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$$

よって、

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{4} - \frac{1}{4(n^2 + n + 1)} + \frac{1}{4} = \frac{n^2 + n + 1}{4} - \frac{1}{4(n^2 + n + 1)}$$