座標空間内で$x^2 \leq y, y^2 \leq z, z^2 \leq x$で表される部分の立体の体積を求めよ。

（解答）

$x = t$で切ると、$t^2 \leq y, y \leq \sqrt{z}, \sqrt{z} \leq \sqrt[4]{t}$より、$t^2 \leq y \leq \sqrt[4]{t}$

$t > 0$であり、$t^2 \leq \sqrt[4]{t}$より、$0 \leq t \leq 1$である。

$x = t$のとき、常に$z = \sqrt{t}$であり、$yz$平面において$z \geq y^2$であるので、

$$S(t) = \int_{t^2}^{\sqrt[4]{t}} \left(\sqrt{t} - y^2\right) dy = \left[\sqrt{t}\, y - \frac{y^3}{3}\right]_{t^2}^{\sqrt[4]{t}} = t^{\frac{3}{4}} - \frac{t^{\frac{3}{4}}}{3} - t^{\frac{5}{2}} + \frac{t^6}{3} = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{4}} - t^{\frac{5}{2}} + \frac{t^6}{3}$$

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} t^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} t^7\right]_0^1 = \frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7}$$