xの関数$f(x)$は実数xについて、$f(x)>0$かつ$f'(x)<0$かつ$f''(x)>0$を満たしている。m,nを$m<n$を満たす整数とし、$S(m,n)=\sum_{k=m}^{n} f(k)$, $F(m,n)=\int_m^n f(x)dx$で定義する。

（１） $F(m,n+1)<S(m,n)<F(m-1,n)$が成り立つことを示せ。

（２） $F(m,n)+f(n)<S(m,n)<F(m,n)+f(m)$が成り立つことを示せ。

（３） $F(m,n)+\dfrac{f(m)+f(n)}{2}<S(m,n)<F\left(m-\dfrac{1}{2},n+\dfrac{1}{2}\right)$が成り立つことを示せ。

(解答)

（１） $f(x)>0$かつ$f'(x)<0$かつ$f''(x)>0$より$C: y=f(x)$は下に凸のグラフである。

kを自然数とし、$k\le x\le k+1$において、$f(k+1)\le f(x)\le f(k)$が成り立つ。

$k\le x\le k+1$で積分すると、不等式の等号は恒等的に成り立つわけで

はないので等号がはずれ、$\int_k^{k+1} f(k+1)dx<\int_k^{k+1} f(x)dx<\int_k^{k+1} f(k)dx$が成り立つ。

ここで、

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx=f(k+1)[x]_k^{k+1}=f(k+1)(k+1-k)=f(k+1)$$

$$\int_k^{k+1} f(x)dx=F(k,k+1)$$

$$\int_k^{k+1} f(k)dx=f(k)[x]_k^{k+1}=f(k)(k+1-k)=f(k)$$

より、$f(k+1)<F(k,k+1)<f(k)$が成り立つ。

$f(k+1)<F(k,k+1)$において、$k=m-1$から$n-1$までの和を取ると、

$$\sum_{k=m-1}^{n-1} f(k+1)<F(m-1,n)\cdots①$$

が成り立つ。

ここで、

$$\sum_{k=m-1}^{n-1} f(k+1)=\sum_{k=m}^{n} f(k)=S(m,n)$$

より、①から$S(m,n)<F(m-1,n)$

が成り立つ。

$F(k,k+1)<f(k)$において、$k=m$からnまでの和を取ると、

$F(m,n+1)<S(m,n)\cdots②$

が成り立つ。

よって、$F(m,n+1)<S(m,n)<F(m-1,n)$が成り立つ。

（２） $f(k+1)<F(k,k+1)$において、$k=m$から$n-1$までの和を取ると、

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k+1) < F(m,n) \cdots ③$$

が成り立つ。

ここで、

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \sum_{k=m}^{n} f(k) - f(m) = S(m,n) - f(m)$$

より、③から $S(m,n) < F(m,n) + f(m)$

が成り立つ。

$F(k,k+1) < f(k)$ において、$k=m$ から $n-1$ までの和を取ると、

$$F(m,n) < \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \cdots ④$$

が成り立つ。

ここで、

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \sum_{k=m}^{n} f(k) - f(n) = S(m,n) - f(n)$$

より、④から $F(m,n) + f(n) < S(m,n)$

が成り立つ。

よって、

$F(m,n) + f(n) < S(m,n) < F(m,n) + f(m)$

が成り立つ。

（３）$k \le x \le k+1$ において、$(k, f(k))$ と $(k+1, f(k+1))$ を結ぶ線分よりも C の方が上に存在しない。

$x = k + \dfrac{1}{2}$ における C の接線の方程式を $l : y = g(x)$ とすると、

$$l : y = g(x) = f'\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(x-k-\frac{1}{2}\right) + f\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

より、

$$g(k) = -\frac{1}{2} f'\left(k+\frac{1}{2}\right) + f\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

$$g(k+1) = \frac{1}{2} f'\left(k+\frac{1}{2}\right) + f\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

であるから、$k \le x \le k+1$ において、

$\left(k, -\dfrac{1}{2} f'\left(k+\dfrac{1}{2}\right) + f\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\right)$ と $\left(k+1, \dfrac{1}{2} f'\left(k+\dfrac{1}{2}\right) + f\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\right)$ を

結ぶ線分よりも l の方が上に存在しない。

よって、

$A_k\left(k, f(k)\right),\ B_k\left(k+1, f(k+1)\right),$

$C_k\left(k, -\frac{1}{2}f'\left(k+\frac{1}{2}\right)+f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right),\ D_k\left(k+1, \frac{1}{2}f'\left(k+\frac{1}{2}\right)+f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right),$

$P_k(k,0)$とおくと、

（台形$P_kP_{k+1}D_kC_k$の面積）$<F(k,k+1)<$（台形$P_kP_{k+1}B_kA_k$の面積）が成り立つ。

（台形$P_kP_{k+1}D_kC_k$の面積）

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{2}f'\left(k+\frac{1}{2}\right)+f\left(k+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(k+\frac{1}{2}\right)+f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}\cdot 1=f\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

（台形$P_kP_{k+1}B_kA_k$の面積）

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{f(k)+f(k+1)\right\}\cdot 1=\frac{f(k)+f(k+1)}{2}$$

よって、$f\left(k+\frac{1}{2}\right)<F(k,k+1)<\frac{f(k)+f(k+1)}{2}$

が成り立つ。

$f\left(k+\frac{1}{2}\right)<F(k,k+1)$において、$k=m-\frac{1}{2}$から$n-\frac{1}{2}$までの和を取ると、

$$S(m,n)<F\left(m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)\cdots⑤$$

が成り立つ。

$F(k,k+1)<\frac{f(k)+f(k+1)}{2}$において、$k=m$から$n-1$までの和を取ると、

$$F(m,n)<\sum_{k=m}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}\cdots⑥$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}&=\frac{1}{2}\sum_{k=m}^{n-1}f(k)+\frac{1}{2}\sum_{k=m}^{n-1}f(k+1)\\&=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=m}^{n}f(k)-f(n)\right\}+\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=m}^{n}f(k)-f(m)\right\}\\&=S(m,n)-\frac{f(m)+f(n)}{2}\end{aligned}$$

より⑥から

$$F(m,n)+\frac{f(m)+f(n)}{2}<S(m,n)$$

が成り立つ。

よって、

$$F(m,n)+\frac{f(m)+f(n)}{2}<S(m,n)<F\left(m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ。