m, n を負でない整数とし、$I(m,n)=\int \sin^{2m}x\cos^{2n}xdx$ と定義する。

（１） $(2m+1)I(m,n)=\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x+(2n-1)I(m+1,n-1)$ $(m\geq 0, n\geq 1)$ が成り立つことを示せ。

（２） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx$ $(n\geq 0)$ を求めよ。

（３） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}xdx$ $(m\geq 0, n\geq 0)$ を求めよ。

（解答）

（１） $m\geq 0, n\geq 1$ のとき

$$I(m,n)=\int \sin^{2m}x\cos^{2n}xdx$$

$$=\int \sin^{2m}x\cos x\cos^{2n-1}xdx$$

$$=\frac{1}{2m+1}\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x-\frac{1}{2m+1}\int \sin^{2m+1}x(2n-1)\cos^{2n-2}x(-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{2m+1}\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x+\frac{2n-1}{2m+1}\int \sin^{2m+2}x\cos^{2n-2}xdx \cdots ①$$

$$=\frac{1}{2m+1}\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x+\frac{2n-1}{2m+1}I(m+1,n-1)$$

両辺を $2m+1$ 倍して、

$$(2m+1)I(m,n)=\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x+(2n-1)I(m+1,n-1)$$

（２） $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx$ とおくと、

$n\geq 1$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{2n-1}xdx$$

$$=\left[-\cos x\sin^{2n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(2n-1)\sin^{2n-2}x\cos xdx$$

$$=(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}x\cos^2 xdx$$

$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{2n-2} x - \sin^{2n} x\right)dx$$

$$= (2n-1)\left(I_{n-1} - I_n\right)$$

よって、$I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \dfrac{\pi}{2}$ より

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2} I_0$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{2n(2n-2)\cdots 2}$$

$$= \frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}\frac{\pi}{2}$$

（3） $J(m,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$ とおくと、（1）より

$$J(m,n) = \left[\frac{1}{2m+1}\sin^{2m+1} x \cos^{2n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n-1}{2m+1} J(m+1, n-1)$$

$$= \frac{2n-1}{2m+1} J(m+1, n-1)$$

$$= \frac{2n-1}{2m+1}\cdot\frac{2n-3}{2m+3} J(m+2, n-2)$$

$$= \frac{2n-1}{2m+1}\cdot\frac{2n-3}{2m+3}\cdots\cdots\frac{1}{2m+2n-1} J(m+n, 0)$$

（2）より $J(m+n,0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2n} x dx = I_{m+n} = \dfrac{(2m+2n)!}{\left\{2^{m+n}(m+n)!\right\}^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

より

$$J(m,n)=\frac{2n-1}{2m+1}\cdot\frac{2n-3}{2m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2m+2n-1}\cdot\frac{(2m+2n)!}{\left\{2^{m+n}(m+n)!\right\}^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}\cdot\frac{2n-3}{2m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2m+2n-1}\cdot\frac{(2m+2n)!}{\left\{2^{m+n}(m+n)!\right\}^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\cdot\frac{2n(2n-2)\cdots2}{2n(2n-2)\cdots2}\cdot\frac{(2m+2)\cdots(2m+2n)}{(2m+2)\cdots(2m+2n)}\cdot\frac{(2m)!}{(2m)!}\cdot\frac{m!}{m!}$$

$$=\frac{(2n)!2^n(2m)!(m+n)!}{(2m+2n)!2^n n!m!}\cdot\frac{(2m+2n)!}{\left\{2^{m+n}(m+n)!\right\}^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n}m!n!(m+n)!}\cdot\frac{\pi}{2}\ (m\ge0,n\ge0)$$

$$=\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}\ (m\ge0,n\ge0)$$