座標平面において、曲線 $y=\dfrac{x}{\sin x}\left(\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と直線 $y=\dfrac{\pi}{4}$ と $y=\dfrac{3}{4}\pi$ と x 軸とで囲まれる部分の図形を D とする。

（1）不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ を求めよ。

（2）a,b を $a\leq b$ を満たす実数の定数とし、関数 $f(x)$ が区間 $a\leq x\leq b$ で連続であるとき、

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ が成り立つことを示せ。

（3）D の面積 S を求めよ。

(解答)

（1）$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

$t=\cos x$ とおくと、$dt=-\sin x dx$ より

$$\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=-\int\frac{dt}{1-t^2}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=-\frac{1}{2}\log\frac{|1+t|}{|1-t|}+C=\frac{1}{2}\log\frac{|1-t|}{|1+t|}+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{|1-\cos x|}{|1+\cos x|}+C$$

$\sin x\neq 0$ より $\cos x\neq\pm 1$ であるから、$-1<\cos x<1$ より $\log\dfrac{|1-\cos x|}{|1+\cos x|}=\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

よって、$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$（$C$ は積分定数）

（2）$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx\cdots$（＊）

$t=a+b-x$ とおくと、$dt=-dx,\ x:a\to b\Rightarrow t:b\to a$ より

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt$ より（＊）が成り立つ。

（3）$\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{3}{4}\pi$ において $\dfrac{x}{\sin x}>0$ より

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{x}{\sin x}dx$$

（2）より $t=\pi-x$ とおくと、$dt=-dx,\ x:\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{3}{4}\pi\Rightarrow t:\dfrac{3}{4}\pi\to\dfrac{\pi}{4}$ より

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{x}{\sin x}dx=-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\pi-t}{\sin(\pi-t)}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\pi-t}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\pi-x}{\sin x}dx$$

$$2S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{x}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\pi-x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(\frac{x}{\sin x}+\frac{\pi-x}{\sin x}\right)dx=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{dx}{\sin x}$$

より

$$S=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{dx}{\sin x}$$

（１）の結果を用いて、

$$S=\frac{\pi}{4}\left[\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=\frac{\pi}{4}\left(\log\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}-\log\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\log\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}\log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\pi}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\pi\log\left(1+\sqrt{2}\right)$$