$I_n=\int_0^{\pi}(1+\cos x)^n dx,\ J_n=\int_0^{\pi}\cos x(1+\cos x)^n dx,\ K_n=\int_0^{\pi}\cos^2 x(1+\cos x)^n dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

で定義する。I_n , J_n , K_n をそれぞれ求めよ。

（解答）

$(1+\cos x)^{n+1}=(1+\cos x)(1+\cos x)^n,$

$(1+\cos x)^{n+2}=(1+\cos x)^2(1+\cos x)^n=(1+2\cos x+\cos^2 x)(1+\cos x)^n$ より、

$I_{n+1}=I_n+J_n$ …①

$I_{n+2}=I_n+2J_n+K_n$ であるから、

$J_n=I_{n+1}-I_n$

$K_n=I_{n+2}-I_n-2J_n=I_{n+2}-I_n-2(I_{n+1}-I_n)=I_{n+2}-2I_{n+1}+I_n$ …②

が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
J_n&=\int_0^{\pi}\cos x(1+\cos x)^n dx\\
&=\left[\sin x\cdot n(1+\cos x)^{n-1}(-\sin x)\right]_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}\sin^2 x(1+\cos x)^{n-1}dx\\
&=n\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)(1+\cos x)^{n-1}dx\\
&=n\int_0^{\pi}(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x)^{n-1}dx\\
&=n\int_0^{\pi}(1-\cos x)(1+\cos x)^n dx\\
&=n(I_n-J_n)
\end{aligned}
$$

より $J_n=\dfrac{n}{n+1}I_n$ …③

③を①に代入して、$I_{n+1}=I_n+\dfrac{n}{n+1}I_n=\dfrac{2n+1}{n+1}I_n$ より

$$
\begin{aligned}
I_n&=\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{2n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1}I_0\\
&=\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{2n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2n(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}{2n(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\pi\\
&=\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{2n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2n(2n-2)\cdot\cdots\cdot 2}{2^n n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}\pi\\
&=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\pi\left(=\frac{{}_{2n}C_n}{2^n}\pi\right)(n=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

③より

$$J_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\pi = \frac{(2n)!}{2^n (n-1)!(n+1)!}\pi \left(= \frac{{}_{2n}C_{n+1}}{2^n}\pi \right) (n = 1,2,\cdots)$$

$$J_0 = \int_0^\pi \cos x dx = [-\sin x]_0^\pi = 0$$

②より

$$K_n = \frac{2n+3}{n+2}\frac{2n+1}{n+1}I_n - 2\frac{2n+1}{n+1}I_n + I_n = \frac{n^2+n+1}{(n+1)(n+2)}I_n = \frac{(n^2+n+1)(2n)!}{2^n n!(n+2)!}\pi \ (n = 0,1,2,\cdots)$$

（参考）

$I_{m,n} = \int_0^\pi \cos^m x(1+\cos x)^n dx$ とおくと、

$(1+\cos x)^{n+m} = (1+\cos x)^m (1+\cos x)^n = \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \cdot \cos^k x(1+\cos x)^n$ より

$I_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \cdot I_{k,n}$ となり、$I_{m,n}$ $(m = 0,1,2,\cdots)$ を順次求めることが可能である。