$\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$をを求めよ。

（解答）

$$\int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \int \frac{1}{n} \frac{nx^{n-1}}{x^n(x^n+1)} dx$$

$x^n = t$ とおくと、$nx^{n-1}dx = dt$ より

$$\int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \int \frac{1}{n} \frac{nx^{n-1}}{x^n(x^n+1)} dx = \frac{1}{n} \int \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{n} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{n} \log \left| \frac{t}{t+1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{n} \log \left| \frac{1}{1+t^{-1}} \right| + C = -\frac{1}{n} \log \left| 1+t^{-1} \right| + C = -\frac{1}{n} \log \left| 1+x^{-n} \right| + C$$

（別解 1）

$\log x = t$ とおくと、$\frac{1}{x} dx = dt$ より

$$\int \frac{dt}{e^{nt}+1} = -\frac{1}{n} \int \frac{-ne^{-nt}}{1+e^{-nt}} dt = -\frac{1}{n} \log \left| 1+e^{-nt} \right| + C = -\frac{1}{n} \log \left| 1+x^{-n} \right| + C$$

（別解 2）

$$\int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \int -\frac{1}{n} \frac{-nx^{-n-1}}{1+x^{-n}} dx = -\frac{1}{n} \log \left| 1+x^{-n} \right| + C$$