a, b を実数の定数とし、$I=\int_0^{2\pi}\left|a\sin x+b\cos x\right|dx$ で定義するとき、I を求めよ。

（解答）

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ より、

$$I=\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\right|dx=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\left|\sin(x+\alpha)\right|dx$$

$$\int_0^{2\pi}\left|\sin(x+\alpha)\right|dx=\int_\alpha^{2\pi+\alpha}\left|\sin t\right|dt=\int_\alpha^{2\pi}\left|\sin t\right|dt+\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha}\left|\sin t\right|dt=\int_\alpha^{2\pi}\left|\sin t\right|dt+\int_0^{\alpha}\left|\sin t\right|dt=\int_0^{2\pi}\left|\sin t\right|dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t\,dt-\int_\pi^{2\pi}\sin t\,dt=\left[-\cos t\right]_0^{\pi}-\left[-\cos t\right]_\pi^{2\pi}=2+2=4$$

より、$I=4\sqrt{a^2+b^2}$