実数xに対して、関数$f(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{1+\cos x\sin x}$で定義する。

（１） $t=\cos x+\sin x$とおくとき、tの最大値および最小値とそれらを与えるxの値をすべて求めよ。

（２） $f(x)$の最大値および最小値とそれらを与えるxの値をすべて求めよ。

（３） $y=f(x)$とx軸とy軸と$x=\dfrac{\pi}{2}$で囲まれる部分の図形Dの面積Sを求めよ。

（４） Dをy軸のまわりに1回転させて得られる回転体の体積Vを求めよ。

(解答)

（１） $t=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$より、$n$を整数とすると、

$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=2n\pi \Leftrightarrow x=\left(2n+\dfrac{1}{4}\right)\pi$のとき$t$は最大値$\sqrt{2}$をとり、

$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=\pi+2n\pi \Leftrightarrow x=\left(2n+\dfrac{5}{4}\right)\pi$のとき$t$は最小値$-\sqrt{2}$をとる。

（２） $t^2=(\cos x+\sin x)^2=1+2\cos x\sin x$より、$\cos x\sin x=\dfrac{t^2-1}{2}$

$$f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{1+\cos x\sin x}=\frac{t}{1+\dfrac{t^2-1}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

（１）より、$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$g(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$とおくと、$g'(t)=\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2(1+t)(1-t)}{(1+t^2)^2}$

増減表を作成すると、

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	1	$\downarrow$

より、

$t=1$のとき$\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi,\dfrac{7}{4}\pi+2n\pi \Leftrightarrow x=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi,2n\pi$のとき最大値1をとり、

$t=-1$のとき$\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{4}\pi+2n\pi,\dfrac{5}{4}\pi+2n\pi \Leftrightarrow x=(2n+1)\pi,\left(2n+\dfrac{3}{2}\right)\pi$のとき最小値$-1$をとる。

（３） $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$のとき、$\cos x\ge 0,\sin x\ge 0$より、$f(x)\ge 0$であるから、

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$s=\cos x-\sin x$ とおくと、$ds=-(\sin x+\cos x)dx$

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow 1\ge s\ge -1$

$s^2=(\cos x-\sin x)^2=1-2\cos x\sin x$ より、$\sin x\cos x=\dfrac{1-s^2}{2}$

$$S=\int_{-1}^{1}\frac{ds}{1+\frac{1-s^2}{2}}=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3-s^2}ds=2\int_0^1\frac{2}{3-s^2}ds=\frac{2}{\sqrt3}\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt3-s}+\frac{1}{\sqrt3+s}\right)ds$$

$$=\frac{2}{\sqrt3}\left[\log\frac{\sqrt3+s}{\sqrt3-s}\right]_0^1=\frac{2\sqrt3}{3}\log\left(2+\sqrt3\right)$$

（4）$V=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx$

$x=\dfrac{\pi}{2}-u$ とおくと、$dx=-du, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}\ge u\ge 0$

$\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)=\cos u, \cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)=\sin u$ より、

$$f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{1+\cos x\sin x}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}=\frac{\sin u+\cos u}{1+\sin u\cos u}=f(u)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)f\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)f\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)f(u)du=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du-\int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du$$

よって、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx=2\pi\cdot\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi^2}{2}S=\frac{\sqrt3}{3}\log\left(2+\sqrt3\right)\pi^2$$