a を正の実数の定数とする。座標空間内に以下の 4 つの領域 D_1, D_2, D_3, D_4 が存在する。

$$D_1 = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, (x-a)^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \right\}$$

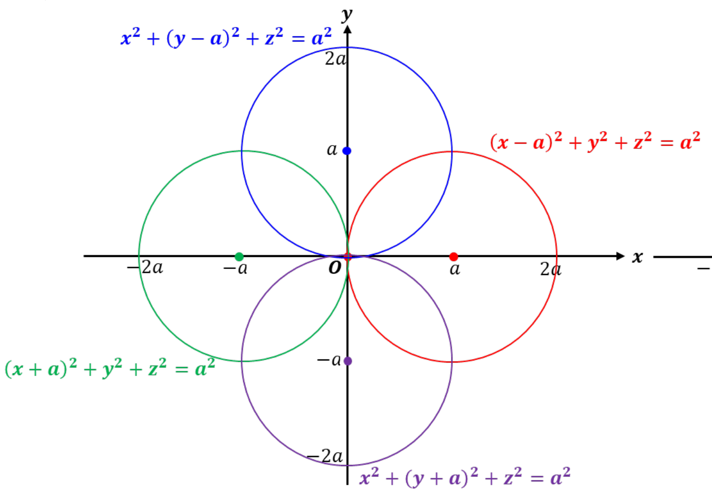
$$D_2 = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, (x+a)^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \right\}$$

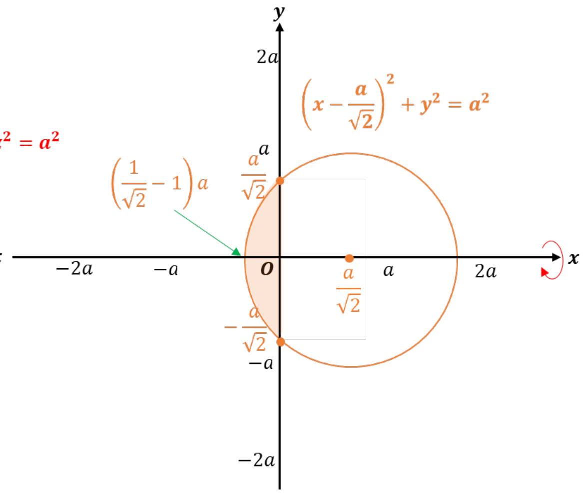
$$D_3 = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x^2 + (y-a)^2 + z^2 \leq a^2 \right\}$$

$$D_4 = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x^2 + (y+a)^2 + z^2 \leq a^2 \right\}$$

D_1, D_2, D_3, D_4 の和集合を D とする。すなわち、$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ である。
このとき、D の体積を求めよ。

（解答）





$D_1 \cap D_2$ の体積は、半径 a の 2 個の球が中心間距離 $\sqrt{2}a$ の位置に配置したときの球が重なる部分の領域の体積と同じである。

$D_1 \cap D_2$ の体積を V_1 とすると、

$$V_1 = 2\pi \int_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)a}^{0} y^2 dx = 2\pi \int_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)a}^{0} \left\{ a^2 - \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\} dx = 2\pi \left[a^2 x - \frac{1}{3}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 \right]_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)a}^{0}$$

$$= 2\pi \left\{ 0 - \frac{1}{3}\left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 - a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) a + \frac{1}{3} a^3 \right\} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{6} \pi a^3$$

であるので求める体積を V, 半径 a の球の体積を V_2 とすると、

$$V = 4V_2 - 4V_1 = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 - 4 \cdot \frac{8 - 5\sqrt{2}}{6} \pi a^3 = \frac{10\sqrt{2}}{3} \pi a^3$$