$a$ を実数とし、$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^a}$ とするとき、$I$ を求めよ。

（解答）

$t=\frac{\pi}{2}-x$ とおくと、$x=\frac{\pi}{2}-t, dx=-dt$ 、$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{\pi}{2}\geq t\geq 0$ より

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^a}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-dt}{1+\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right\}^a}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\left(\frac{1}{\tan t}\right)^a}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan t)^a}{(\tan t)^a+1}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x)^a}{(\tan x)^a+1}dx$$

$$2I=I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^a}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x)^a}{(\tan x)^a+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+(\tan x)^a}{1+(\tan x)^a}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

よって、$I=\frac{\pi}{4}$