任意の自然数nに対して、$x^2+y^2+z^2=w^n$を満たす自然数(x,y,z,w)の解が存在することを示せ。

（解答）

「$x^2+y^2+z^2=w^n$を満たす自然数(x,y,z,w)の解が存在する」…（☆）

（☆）が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

（ⅰ）$n=1$のとき、$1^2+1^2+1^2=3^1$より$(x,y,z,w)=(1,1,1,3)$が解として挙げられる。

（ⅱ）$n=2$のとき、$1^2+2^2+2^2=3^2$より$(x,y,z,w)=(1,2,2,3)$が解として挙げられる。

（ⅲ）$n=k$のとき、「$x^2+y^2+z^2=w^k$を満たす自然数(x,y,z,w)の解が存在する

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=w^{k+2}$を満たす自然数$(x,y,z,w)$の解が存在する」…（＊）

（＊）が成り立つことを示す。

$x^2+y^2+z^2=w^k$ …①を満たす自然数(x,y,z)の解を$(x,y,z)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$とすると、

①の両辺にw^2をかけて整理すると、$(xw)^2+(yw)^2+(zw)^2=w^{k+2}$ …②より②を満たす自然数解は、$(x,y,z,w)=(\alpha\delta,\beta\delta,\gamma\delta,\delta)$となる。よって、（＊）が成り立つ。

以上、（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）よりすべての自然数nに対して、（☆）が成り立つ。

よって、任意の自然数nに対して、$x^2+y^2+z^2=w^n$を満たす自然数(x,y,z,w)の解が存在する。