a,b を正の有理数とする。$\sqrt{3a^2+5b^2}$ は無理数であることを示せ。

（解答）

$\sqrt{3a^2+5b^2}$ が有理数であると仮定すると、a,b は正の有理数であるので、c,d を互いに素である自然数として、$\sqrt{3a^2+5b^2}=\dfrac{d}{c}$ とおくことができる。よって、$3a^2+5b^2=\dfrac{d^2}{c^2}$ …①となる。

a,b は正の有理数であるので、p,q を互いに素である自然数、r,s を互いに素である自然数として、$a=\dfrac{q}{p},b=\dfrac{s}{r}$ とおくことができる。これを①に代入すると、

$3\dfrac{q^2}{p^2}+5\dfrac{s^2}{r^2}=\dfrac{d^2}{c^2}$ より $3q^2r^2c^2+5p^2s^2c^2=p^2r^2d^2$ となる。

$qrc=x, psc=y, prd=z$ とおくと、x,y,z は自然数であり、$3x^2+5y^2=z^2$ …②が成り立つ。

以下、合同式は $\bmod 3$ について考えるものとする。
k,n を自然数とする。

$n=3k$ のとき $n^2=9k^2=3(3k^2)\equiv 0$

$n=3k\pm 1$ のとき $n^2=(3k\pm 1)^2\equiv 1$

より平方数を 3 で割ったあまりは 0 または 1 である。…③

y が 3 の倍数でないとき $3x^2+5y^2\equiv 5\equiv 2$ となり③より不適。

y が 3 の倍数であるとき $3x^2+5y^2\equiv 0$ より z は 3 の倍数であるので、z' を自然数として、$z=3z'$ と書くことができる。また、y' を自然数として、$y=3y'$ と書くことができる。

これらを②に代入すると、$3x^2+5(3y')^2=(3z')^2 \Leftrightarrow x^2=3(z'^2-5y'^2)$ となり、x^2 が 3 の倍数であるので x は 3 の倍数である。x' を自然数として、$x=3x'$ と書くことができるので、$y=3y'$、$z=3z'$ 合わせて②に代入して、$3(3x')^2+5(3y')^2=(3z')^2 \Leftrightarrow 3x'^2+5y'^2=z'^2$ …④が成り立つ。

②,④よりこの操作は無限に行うことができ、$x>x', y>y', z>z'$ よりどんどんと値が小さくなっていくが、x,y,z は自然数であるので無限に小さくなることはできない。よって②を満たす自然数 x,y,z の組は存在しないので、$\sqrt{3a^2+5b^2}$ が有理数であると仮定が誤りであり、

$\sqrt{3a^2+5b^2}$ は無理数である。