$a=2023^{2023}, b=2023^{a}, c=a^{2023}$とする。

（１） aの下２桁を求めよ。

（２） bの下２桁を求めよ。

（３） cの下２桁を求めよ。

（解答）

下３桁の数字を考えるので、以下mod100について考える。

（１） $a=2023^{2023}\equiv 23^{2023}=(3+20)^{2023}=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}C_k\cdot 3^{2023-k}\cdot 20^k$

$$=3^{2023}+{}_{2023}C_1\cdot 3^{2022}\cdot 20^1+\sum_{k=2}^{2023}{}_{2023}C_k\cdot 3^{2023-k}\cdot 20^k$$

$$\equiv 3^{2023}+{}_{2023}C_1\cdot 3^{2022}\cdot 20^1$$

$3^{10}=59049\equiv 49$

$3^{20}\equiv 49^2=2401\equiv 01$

より

$3^{2022}=3^{20\cdot 101+2}\equiv 3^2=09$

$3^{2023}=3^{20\cdot 101+3}\equiv 3^3=27$

であるから、

$$a\equiv 27+{}_{2023}C_1\cdot 9\cdot 20^1$$

$$=27+2023\cdot 2022\cdot 9\cdot 10$$

$$\equiv 27+23\cdot 22\cdot 9\cdot 10$$

$$=45567$$

よって、下２桁は67

（２） $b=2023^{a}\equiv 23^{a}=(3+20)^{a}=\sum_{k=0}^{a}{}_{a}C_k\cdot 3^{a-k}\cdot 20^k$

$$=3^{a}+{}_{a}C_1\cdot 3^{a-1}\cdot 20^1+\sum_{k=2}^{a}{}_{a}C_k\cdot 3^{a-k}\cdot 20^k$$

$$\equiv 3^{a}+{}_{a}C_1\cdot 3^{a-1}\cdot 20^1$$

$$=3^{a}+20a\cdot 3^{a-1}$$

aの下2桁は67で$3^{100}=3^{20\times 5}\equiv 01$より

$$a\equiv 3^{67}+20\cdot 67\cdot 3^{66}$$
$$\equiv 3^{7}+20\cdot 67\cdot 3^{6}$$
$$=979047$$

よって、下2桁は47

（3）$c=a^{2023}\equiv 67^{2023}=(70-3)^{2023}=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}C_k\cdot 70^{2023-k}\cdot(-3)^k$

$$=\sum_{k=0}^{2021}{}_{2023}C_k\cdot 70^{2023-k}\cdot(-3)^k+{}_{2023}C_{2022}\cdot 70^1\cdot(-3)^{2022}+(-3)^{2023}$$

$$\equiv 2023\cdot 70^1\cdot(-3)^{2022}+(-3)^{2023}$$

$$\equiv 2023\cdot 70^1\cdot(-3)^{2}+(-3)^{3}$$

$$\equiv 23\cdot 70^1\cdot(-3)^{2}+(-3)^{3}$$

$$=14463$$

よって、下2桁は63