

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表すものとするとき、 $10 \left[\frac{\sqrt{10}^{\sqrt{10}}}{10} \right]$ を求めよ。

(解答)

$$3^2 = 9 < 10$$

$$3.2^2 = 10.24 > 10$$

より $3 < \sqrt{10} < 3.2$ が成り立つので、 $\sqrt{10}^3 < \sqrt{10}^{\sqrt{10}} < \sqrt{10}^{3.2}$ が成り立つ。

$A = \sqrt{10}^3$ とおくと、

$$A^2 = 10^3 = 1000 > 900 = 30^2 \text{ より } A > 30$$

$B = \sqrt{10}^{3.2}$ とおくと、

$$B^5 = \left(\sqrt{10}^{3.2} \right)^5 = 10^8 = 10^3 \times 10^5 < 2^{10} \times 10^5 = (2^2 \times 10)^5 = 40^5$$

より $B < 40$

よって、 $30 < A < \sqrt{10}^{\sqrt{10}} < B < 40$ より $30 < \sqrt{10}^{\sqrt{10}} < 40 \Leftrightarrow 3 < \frac{\sqrt{10}^{\sqrt{10}}}{10} < 4$

であるので、 $\left[\frac{\sqrt{10}^{\sqrt{10}}}{10} \right] = 3 \Leftrightarrow 10 \left[\frac{\sqrt{10}^{\sqrt{10}}}{10} \right] = 30$