自然数nに対して4^nを5で割ったときの商をq_nとするとき、$\sum_{k=1}^{n} q_k$を求めよ。

（解答）

4^nを5で割ったときのあまりをr_nとするとき、$4^n = 5q_n + r_n \cdots$①と書くことができる。

以下合同式はmod 5で考えるものとする。

$4^1 \equiv 4,\ 4^2 \equiv 1$より$r_1 = 4,\ r_2 = 1,\ 4^{n+2} - 4^n = 15 \cdot 4^n \equiv 0$より、

mを自然数として、$r_n = \begin{cases} 4(n = 2m-1) \\ 1(n = 2m) \end{cases} \cdots$②が成り立つ。

①より$q_n = \dfrac{4^n - r_n}{5} \cdots$①'

$n = 2m-1$のとき①',②より$q_{2m-1} = \dfrac{4^{2m-1} - 4}{5}$

$n = 2m$のとき①',②より$q_{4m} = \dfrac{4^{2m} - 1}{5}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$とおくと、

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} q_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} q_{2k-1} + \sum_{k=1}^{m} q_{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(q_{2k-1} + q_{2k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{4^{2k-1} - 4}{5} + \frac{4^{2k} - 1}{5}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(4^{2k-1} - 1\right)$$

$$= \frac{4\left(4^{2m} - 1\right)}{4^2 - 1} - m$$

$$=\frac{4^{2m+1}-15m-4}{15}$$

$m=\frac{n}{2}$ より $S_n=\frac{2^{2n+3}-15n-8}{30}$

$$S_{2m-1}=S_{2m}-q_{2m}$$

$$=\frac{4^{2m+1}-15m-4}{15}-\frac{4^{2m}-1}{5}$$

$$=\frac{4^{2m}-15m-1}{15}$$

$m=\frac{n+1}{2}$ より $S_n=\frac{2^{2n+3}-15n-17}{30}$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n}q_k=\begin{cases}\frac{2^{2n+3}-15n-17}{30}(n=2m-1)\\ \frac{2^{2n+3}-15n-8}{30}(n=2m)\end{cases}$$

まとめると、$\frac{2^{2n+4}-30n-25+9\cdot(-1)^n}{60}$