A, B, C, D, n を自然数、 p を奇数の素数とする。

（1） $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{A}{B}$ とおく。このとき、 A は p の倍数であることを示せ。

（2） $6n+1$ が素数となるような n に対して、$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{4n-1}-\dfrac{1}{4n}=\dfrac{C}{D}$ とおく。

このとき、C は $6n+1$ の倍数であることを示せ。

(解答)

（1） $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p-1}$

$$=\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)$$

$$=\frac{p}{1\cdot(p-1)}+\frac{p}{2\cdot(p-2)}+\cdots+\frac{p}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}$$

$$=p\left\{\frac{1}{1\cdot(p-1)}+\frac{1}{2\cdot(p-2)}+\cdots+\frac{4}{(p-1)(p+1)}\right\}\cdots①$$

となり、 p は奇数の素数であるので $p\geq 3$ であるから、①の｛ ｝内の和の分母に現れるどの因数にも約分されることはない。

よって、 A は p の倍数である。

（2） $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{4n-1}-\dfrac{1}{4n}$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}$$

$$=\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{4n}\right)+\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{4n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{6n+1}{(2n+1)\cdot 4n}+\frac{6n+1}{(2n+2)\cdot(4n-1)}+\cdots+\frac{6n+1}{3n\cdot(3n+1)}$$

$$=(6n+1)\left\{\frac{1}{(2n+1)\cdot 4n}+\frac{1}{(2n+2)\cdot(4n-1)}+\cdots+\frac{1}{3n\cdot(3n+1)}\right\}\cdots②$$

となり、$6n+1$ は素数であるので②の｛ ｝内の和の分母に現れるどの因数にも約分されることはない。

よって、 A は $6n+1$ の倍数である。