nを2以上の自然数、kを$1 \leq k \leq n$を満たす自然数とする。すべてnで割り切れないn個の自然数の中からいくつかの自然数を選んでk個の和をとったとき、その和がnで割り切れるようにできることを示せ。

（解答）

nの自然数をそれぞれ$a_1, a_2, \cdots, a_n$とし、$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$とすると、

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

：

$S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$

：

$S_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_j$

：

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

となり、

$S_1, S_2, \cdots, S_n$の中でnで割り切れるようなものがあればそれが求める和の作り方であり、

$S_1, S_2, \cdots, S_n$の中でnで割り切れるようなものがないとき、それらをnで割ったあまりは$1, 2, \cdots, n-1$のいずれかであるので、少なくともあまりが等しいものが2個は存在する。

その2個を$S_i, S_j \ (1 \leq i < j \leq n)$とおくと、$S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$は$n$で割り切れる。

よって、題意は示された。