nを自然数とし、実数xに対して、xを超えない最大の整数を$[x]$で表す。

（１） $[x]+[2x]+[3x]=2023$を満たすxの範囲を求めよ。

（２） $[x]+[2x]+[3x]+[4x]=2023$を満たすxの範囲を求めよ。

(解答)

（１） $[x]+[2x]+[3x]=2023\cdots①$

mを整数、αを$0\leq\alpha<1$を満たす実数とし、$x=m+\alpha$とおくと、

①より

$[m+\alpha]+[2(m+\alpha)]+[3(m+\alpha)]=2023$

となり、

$m+2m+3m+[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=2023$

より

$6m+[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=2023\cdots②$

となる。

自然数lに対して、$0\leq[l\alpha]\leq l-1$より

$0\leq[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]\leq 3,\ 2023=6\times337+1$より

$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=1,\ m=337$となる。

$0\leq\alpha<\frac{1}{3}$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=0+0+0+0=0$

$\frac{1}{3}\leq\alpha<\frac{1}{2}$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=0+0+1=1$

$\frac{1}{2}\leq\alpha<\frac{2}{3}$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=0+1+1=2$

$\frac{2}{3}\leq\alpha<1$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=0+1+2=3$

より$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=1$となる、$\alpha$の値は$\frac{1}{3}\leq\alpha<\frac{1}{2}$となり、$x=m+\alpha$より$x$の範囲は、

$337+\frac{1}{3}\leq x<337+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1012}{3}\leq x<\frac{675}{2}$

（２） $[x]+[2x]+[3x]+[4x]=2023\cdots③$

mを整数、αを$0\leq\alpha<1$を満たす実数とし、$x=m+\alpha$とおくと、

③より

$[m+\alpha]+[2(m+\alpha)]+[3(m+\alpha)]+[4(m+\alpha)]=2023$

となり、

$m+2m+3m+4m+[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha]=2023$

より

$10m+[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha]=2023\cdots④$

となる。

自然数lに対して、$0 \leq [l\alpha] \leq l-1$より

$0 \leq [\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha] \leq 6,\ 2023 = 10 \times 202 + 3$より

$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha] = 3,\ m = 202$となる。

$\dfrac{1}{4} \leq \alpha < \dfrac{1}{3}$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha] = 0+0+0+1 = 1$

$\dfrac{1}{3} \leq \alpha < \dfrac{1}{2}$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha] = 0+0+1+1 = 2$

$\dfrac{1}{2} \leq \alpha < \dfrac{2}{3}$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha] = 0+1+1+2 = 4$

$\dfrac{2}{3} \leq \alpha < \dfrac{3}{4}$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha] = 0+1+2+2 = 5$

$\dfrac{3}{4} \leq \alpha < 1$のとき$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha] = 0+1+2+3 = 6$

より$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha] = 3$となる、$\alpha$の値は存在しない。

よって、xの範囲は存在しない。