

5進数で2桁の数と7進数で2桁の数の積が10進数で2桁の数になる積の組数を求めよ。

(解答)

$$ab_{(5)} = a \times 5^1 + b \times 5^0 = 5a + b_{(10)} \quad (1 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$cd_{(7)} = c \times 7^1 + d \times 7^0 = 7c + d_{(10)} \quad (1 \leq c \leq 6, 0 \leq d \leq 6) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \text{が10進数で2桁の数より} 10 \leq (5a + b)(7c + d) \leq 99 \cdots \textcircled{3}$$

$(5a + b)(7c + d) \geq 5 \times 7 = 35$ より $\textcircled{3}$ の左側の不等式は常に成り立つので右側の不等式のみ考えれば良い。

$$(5a + b)(7c + d) \leq 99 \cdots \textcircled{4} \text{より}$$

$a \geq 2$ かつ $c \geq 2$ のとき $(5a + b)(7c + d) \geq 5 \cdot 2 \times 7 \cdot 2 = 140$ より a, c が同時に2以上になることはない。

$a \geq 3$ または $c \geq 3$ のとき $(5a + b)(7c + d) \geq 5 \cdot 3 \times 7 \cdot 1 = 5 \cdot 1 \times 7 \cdot 3 = 105$ より a, c は2以下である。よって、 $(a, c) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ のいずれかである。

(i) $(a, c) = (1, 1)$ のとき

$$\textcircled{4} \text{より} (5 + b)(7 + d) \leq 99$$

$$0 \leq b \leq 2 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 6$$

$$b = 3 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 5$$

$$b = 4 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 4$$

(ii) $(a, c) = (1, 2)$ のとき

$$\textcircled{4} \text{より} (5 + b)(14 + d) \leq 99$$

$$b = 0 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 6$$

$$b = 1 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 2$$

$$b = 2 \text{ のとき } d = 0$$

$$b \geq 3 \text{ のとき } d \text{ は存在しない。}$$

(iii) $(a, c) = (2, 1)$ のとき

$$\textcircled{4} \text{より} (10 + b)(7 + d) \leq 99$$

$$b = 0 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 2$$

$$b = 1 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 2$$

$$b = 2 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 1$$

$$b = 3 \text{ のとき } 0 \leq d \leq 1$$

$$b = 4 \text{ のとき } d = 0$$

よって、(i) (ii) (iii) より

$$\text{求める組数は、}(7 + 7 + 7 + 6 + 5) + (7 + 3 + 1) + (3 + 3 + 2 + 2 + 1) = 54$$