n を正の整数とする。4人がじゃんけんを繰り返し、n 回目ではじめて勝者が1人だけ決まる確率を P_n とする。ただし、途中で負けた場合は次回のじゃんけんに参加しないものとする。

（１） P_1 を求めよ。
（２） P_2 を求めよ。
（３） P_3 を求めよ。
（４） P_n を求めよ。

（解答）

$n(1 \leq k \leq n)$ 人が1回だけじゃんけんをして k 人だけ勝つ確率を $Q_{n,k}$ とすると、$Q_{n,k}$ は、全事象が 3^n 通り、誰が勝つかが ${}_nC_k$ 通り、手の出し方が3通りあるので

$$Q_{n,k} = \frac{{}_nC_k \cdot 3}{3^n} = \frac{{}_nC_k}{3^{n-1}} \quad (1 \leq k < n)$$

あいこのとき

$$Q_{n,n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} Q_{n,k} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}_nC_k}{3^{n-1}} = 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k = 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$

になる。

（１） 4人がじゃんけんを1回だけして1人だけ勝つ確率は、$Q_{4,1} = \dfrac{{}_4C_1}{3^3} = \dfrac{4}{27}$

（２） 2回目ではじめて勝者が1人だけ決まるパターンは、

	最初		1回目		2回目
[1]	4	→	4	→	1
[2]	4	→	3	→	1
[3]	4	→	2	→	1

の3パターンである。

[1],[2],[3]のときの確率をそれぞれ $P_{2,1}, P_{2,2}, P_{2,3}$ とすると、

$$P_{2,1} = Q_{4,4} \times Q_{4,1} = \left(1 - \frac{2^4 - 2}{3^3}\right) \times \frac{{}_4C_1}{3^3} = \frac{13}{27} \times \frac{4}{27} = \frac{52}{729}$$

$$P_{2,2} = Q_{4,3} \times Q_{3,1} = \frac{{}_4C_3}{3^3} \times \frac{{}_3C_1}{3^2} = \frac{4}{27} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{81}$$

$$P_{2,3} = Q_{4,2} \times Q_{2,1} = \frac{{}_4C_2}{3^3} \times \frac{{}_2C_1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

よって、$P_2 = P_{2,1} + P_{2,2} + P_{2,3} = \dfrac{52}{729} + \dfrac{4}{81} + \dfrac{4}{27} = \dfrac{196}{729}$

（３） 3回目ではじめて勝者が1人だけ決まるパターンは、

最初		1回目		2回目		3回目
[1] 4	$\to$	4	$\to$	4	$\to$	1
[2] 4	$\to$	4	$\to$	3	$\to$	1
[3] 4	$\to$	4	$\to$	2	$\to$	1
[4] 4	$\to$	3	$\to$	3	$\to$	1
[5] 4	$\to$	3	$\to$	2	$\to$	1
[6] 4	$\to$	2	$\to$	2	$\to$	1

の6パターンである。

[1],[2],[3],[4],[5],[6]のときの確率をそれぞれ$P_{3,1}, P_{3,2}, P_{3,3}, P_{3,4}, P_{3,5}, P_{3,6}$とすると、

（２）の結果より、$P_{3,1}+P_{3,2}+P_{3,3}=Q_{4,4}\times P_2=\dfrac{13}{27}\times\dfrac{196}{729}=\dfrac{2548}{19683}$

$$P_{3,4}=Q_{4,3}\times Q_{3,3}\times Q_{3,1}=\frac{{}_4C_3}{3^3}\times\left(1-\frac{2^3-2}{3^2}\right)\times\frac{{}_3C_1}{3^2}=\frac{4}{27}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{243}$$

$$P_{3,5}=Q_{4,3}\times Q_{3,2}\times Q_{2,1}=\frac{{}_4C_3}{3^3}\times\frac{{}_3C_2}{3^2}\times\frac{{}_2C_1}{3}=\frac{4}{27}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{243}$$

$$P_{3,6}=Q_{4,2}\times Q_{2,2}\times Q_{2,1}=\frac{{}_4C_2}{3^3}\times\left(1-\frac{2^2-2}{3}\right)\times\frac{{}_2C_1}{3}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{81}$$

よって、$P_3=P_{3,1}+P_{3,2}+P_{3,3}+P_{3,4}+P_{3,5}+P_{3,6}=\dfrac{2548}{19683}+\dfrac{4}{243}+\dfrac{8}{243}+\dfrac{4}{81}=\dfrac{4492}{19683}$

（４）n回目ではじめて勝者が1人だけ決まるパターンは、$1\le i<j\le n-1$として、次のパターンが考えられる。

最初				i回目				j回目				n回目
[1] 4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	1
[2] 4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	3	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	1
[3] 4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	1
[4] 4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	3	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	3	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	1
[5] 4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	3	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	1
[6] 4	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\to$	$\cdots$	1

の6パターンである。

[1],[2],[3],[4],[5],[6]のときの確率をそれぞれ$P_{n,1}, P_{n,2}, P_{n,3}, P_{n,4}, P_{n,5}, P_{n,6}$とすると、

[1]のとき

$j=n-1$回目まで4人のままでn回目に$4\to1$人になる確率は、

$$P_{n,1}={Q_{4,4}}^{n-1}\times Q_{4,1}=\left(\frac{13}{27}\right)^{n-1}\times\frac{4}{27}=\frac{4}{13}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}$$

$[2]$のとき

j 回目で3人に、n 回目に1人になる確率を $P_{n,2,j}$ とおくと、

1回目から $(j-1)$ 回目まで $4\to 4,$ j 回目に $4\to 3,$ $(j+1)$ 回目から $(n-1)$ 回目まで $3\to 3,$
n 回目に $3\to 1$ になるので、

$$P_{n,2,j}={Q_{4,4}}^{j-1}\times Q_{4,3}\times {Q_{3,3}}^{n-j-1}\times Q_{3,1}=\left(\frac{13}{27}\right)^{j-1}\times\frac{4}{27}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-j-1}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{13}{9}\right)^{j-1}$$

より、$$P_{n,2}=\sum_{j=1}^{n-1}P_{n,2,j}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{13}{9}\right)^{j-1}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\frac{\left(\frac{13}{9}\right)^{n-1}-1}{\frac{13}{9}-1}=\frac{9}{13}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$[3]$のとき

j 回目で2人に、n 回目に1人になる確率を $P_{n,3,j}$ とおくと、

1回目から $(j-1)$ 回目まで $4\to 4,$ j 回目に $4\to 2,$ $(j+1)$ 回目から $(n-1)$ 回目まで $2\to 2,$
n 回目に $2\to 1$ になるので、

$$P_{n,3,j}={Q_{4,4}}^{j-1}\times Q_{4,2}\times {Q_{2,2}}^{n-j-1}\times Q_{2,1}=\left(\frac{13}{27}\right)^{j-1}\times\frac{2}{9}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-j-1}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{13}{9}\right)^{j-1}$$

$$=3P_{n,2,j}$$

より、$$P_{n,3}=3P_{n,2}=\frac{27}{13}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}-3\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$[4]$のとき
$[2]$に含まれる。
$[5]$のとき

i 回目で3人に、j 回目で2人に、n 回目に1人になる確率を $P_{n,5,i,j}$ とおくと、

1回目から $(i-1)$ 回目まで $4\to 4,$ i 回目に $4\to 3,$ $(i+1)$ 回目から $(j-1)$ 回目まで $3\to 3,$
j 回目に $3\to 2,$ $(j+1)$ 回目から $(n-1)$ 回目まで $2\to 2,$ n 回目に $2\to 1$ になるので、

$$P_{n,5,i,j}={Q_{4,4}}^{i-1}\times Q_{4,3}\times {Q_{3,3}}^{j-i-1}\times Q_{3,2}\times {Q_{2,2}}^{n-j-1}\times Q_{2,1}$$

$$=\left(\frac{13}{27}\right)^{i-1}\times\frac{4}{27}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{j-i-1}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-j-1}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{13}{9}\right)^{i-1}$$

$1\le i<j\le n-1$ より、$i=1$ から $j-1$ まで、$j=2$ から $n-1$ までの和をとって、

$$P_{n,5}=\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{i=1}^{j-1}P_{n,5,i,j}=\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{8}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{13}{9}\right)^{i-1}=\frac{8}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\left(\frac{13}{9}\right)^{j-1}-1}{\frac{13}{9}-1}$$

$$=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sum_{j=2}^{n-1}\left\{\left(\frac{13}{9}\right)^{j-1}-1\right\}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left[\frac{\frac{13}{9}\cdot\left\{\left(\frac{13}{9}\right)^{n-2}-1\right\}}{\frac{13}{9}-1}-(n-2)\right]$$

$$=\frac{81}{26}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}-\frac{1}{2}(4n+5)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

[6]のとき

[3]に含まれる。

よって、

$$P_n=P_{n,1}+P_{n,2}+P_{n,3}+P_{n,5}$$

$$=\frac{4}{13}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}+\frac{9}{13}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{27}{13}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}-3\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{81}{26}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}-\frac{1}{2}(4n+5)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\frac{161}{26}\left(\frac{13}{27}\right)^{n}-\frac{1}{2}(4n+13)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$