小問（１）（２）（３）からなる試験問題があり、（１）（２）（３）の配点は順にa,b,c点$(a<b<c<4a)$である。（１）を間違えると（２）（３）は自動的に0点であり、（２）を間違えると（３）は自動的に0点である。各小問にt分ずつ時間をかければ完答できるが、試験時間は$2t$分しかなく、それ以前に間違いがなければ、どの小問についてもtp分$(0\leq p\leq 1)$の時間をかけたときの正解率はpである。得点の期待値を最も大きくするには各小問の時間配分をどのように定めれば良いかを答えよ。

（解答）

（１）にtp分$(0\leq p\leq 1)$（２）にtq分$(0\leq q\leq 1)$（３）にtr分$(0\leq r\leq 1)$かけたとすると、

$tp+tq+tr=2t$ より $p+q+r=2\cdots$①

得点の期待値をEとおくと、

	（１）	（２）	（３）
a点	○	×	×
$a+b$点	○	○	×
$a+b+c$点	○	○	○

より、$E=ap(1-q)+(a+b)pq(1-r)+(a+b+c)pqr=ap+bpq+cpqr\cdots$②

①より $r=2-p-q\cdots$①'

①'を②に代入して、

$$E=ap+bpq+cpq(2-p-q)$$

$$=-cpq^2+\{b+(2-p)c\}pq+ap$$

$$=-cp\left\{q-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+2-p\right)\right\}^2+\frac{cp}{4}\left(\frac{b}{c}+2-p\right)^2+ap$$

$$=-cp\left\{q-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+2-p\right)\right\}^2+\frac{c}{4}p^3-\frac{1}{2}(b+2c)p^2+\left(\frac{b^2}{4c}+a+b+c\right)p$$

$$\leq\frac{c}{4}p^3-\frac{1}{2}(b+2c)p^2+\left(\frac{b^2}{4c}+a+b+c\right)p$$

等号成立は、$q=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{c}+2-p\right)$のときである。

$f(p)=\dfrac{c}{4}p^3-\dfrac{1}{2}(b+2c)p^2+\left(\dfrac{b^2}{4c}+a+b+c\right)p$とおくと、

$$f'(p)=\frac{3c}{4}p^2-(b+2c)p+\frac{b^2}{4c}+a+b+c$$

$$=\frac{3c}{4}\left\{p-\frac{2(b+2c)}{3c}\right\}^2-\frac{(b+2c)^2}{3c}+\frac{b^2}{4c}+a+b+c$$

$$=\frac{3c}{4}\left(p-\frac{2b}{3c}-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{b^2}{12c}+a-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}$$

ここで、$\left(p-\frac{2b}{3c}-\frac{4}{3}\right)^2\geq\left(1-\frac{2b}{3c}-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2b}{3c}+\frac{1}{3}\right)^2$ より

$$f'(p)\geq\frac{3c}{4}\left(\frac{2b}{3c}+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{b^2}{12c}+a-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}=\frac{b^2}{4c}-\frac{c}{4}+a=\frac{4ac+b^2-c^2}{4c}>\frac{c^2+b^2-c^2}{4c}$$

$$=\frac{b^2}{4c}>0$$

であり、$0\leq p\leq 1$ の範囲において常に $f'(p)>0$ となる。
よって、$0\leq p\leq 1$ の範囲において $f'(p)>0$ より $E=f(p)\leq f(1)$ となり、
このとき、

$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+2-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+1\right)>0$$

$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+2-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+1\right)<\frac{1}{2}(1+1)=1$$

より $0<q<1$ を満たすので、$q=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+1\right)$

①'より $r=2-p-q=2-1-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+1\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{c}\right)=1-q$

$0<q<1$ より $0<r<1$ が成り立つので、

よって、$p=1,q=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{c}\right),r=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{c}\right)$ より

（1）に t 分、（2）に $\frac{t}{2}\left(1+\frac{b}{c}\right)$ 分、（3）に $\frac{t}{2}\left(1-\frac{b}{c}\right)$ 分かけたときに得点の期待値が最も大きくなる。

（参考）

得点の期待値 E の最大値は、

$$E=ap+bpq+cpqr\leq a+b\times\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{c}\right)+c\times\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{c}\right)\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{c}\right)=a+\frac{(b+c)^2}{4c}$$