m,nを自然数とする。黒玉m個、白玉mn個を平面上に円形になるように並べたとき、その並べ方の総数を$S(m,n)$とおく。ただし、回転して重なるものは同じ並べ方とみなす。

（１） $S(3,1)$を求めよ。

（２） $S(3,n)$を求めよ。

(解答)

（１）黒玉3個をまず円状に配置し、黒玉の間に入る白玉の個数を時計回りに順にa,b,cとおく。

（ｉ） $a=3$のとき
このような並べ方は1通り

（ii） $a=2$のとき
$(a,b,c)=(2,1,0),(2,0,1)$の場合があり、これらは回転させても重ならないので2通り

（iii） $a=1$のとき
$(a,b,c)=(1,2,0),(1,1,1),(1,0,2)$の場合があり、
$(a,b,c)=(1,2,0)$の場合は（ii）の$(a,b,c)=(2,0,1)$の場合と重なり、
$(a,b,c)=(1,0,2)$の場合は（ii）の$(a,b,c)=(2,1,0)$の場合と重なるので、
$(a,b,c)=(1,1,1)$の場合の1通り

（iv） $a=0$のとき
$(a,b,c)=(0,3,0),(0,2,1),(0,1,2),(0,0,3)$の場合があり、
いずれの場合も（ii）（iii）の場合に含まれるので0通り

よって、（ｉ）〜（iv）より$1+2+1+0=4$通り

（２）黒玉1個を固定して考え、3個の黒玉の間に入る白玉の個数をそれぞれ時計回りに順にa,b,cとおくと、$a+b+c=3n$が成り立ち、以下の（ｉ）〜（iii）のいずれかの場合となる。

（ｉ） $a=b=c$のとき
$3a=3n$より$(a,b,c)=(n,n,n)$の1通り。

（ii） $a=b\neq c$のとき
$2a+c=3n$より$c=3n-2a$であり、$a=0,1,2,\cdots,\left[\dfrac{3}{2}n\right]$であるが、この$a$の値のうちの1つは（ｉ）に含まれるので、それを除いて$\left[\dfrac{3}{2}n\right]$通り。

（iii） $a\neq b\neq c$のとき
固定した黒玉を除く$3n+2$個の玉の配置のうち、2個の黒玉を置く場所の選び方が${}_{3n+2}C_2$個あり、そのうち、a,b,cのうち少なくとも2つ等しくなる場合を除けば、

$$\frac{{}_{3n+2}C_2-\{(\text{i})+3\times(\text{ii})\}}{3!}$$通り。

それぞれの場合に回転を考慮して調べていく。

（ｉ）の場合、(a,a,a)の1通りのみであるのでこの1通りしかない。

（ⅱ）の場合、$(a,a,c),(a,c,a),(c,a,a)$の3通りがあり、すべて同じものであるので$\left[\frac{3}{2}n\right]$通り。

（ⅲ）の場合、$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$の6通りがあり、実質$(a,b,c),(a,c,b)$の2通り。

以上を合わせて、求める場合の数は、

$$1+\left[\frac{3}{2}n\right]+2\times\frac{{}_{3n+2}C_2-\{(\text{i})+3\times(\text{ii})\}}{3!}$$

$$=1+\left[\frac{3}{2}n\right]+2\times\frac{\frac{(3n+2)(3n+1)}{2}-\left\{1+3\times\left[\frac{3}{2}n\right]\right\}}{3!}$$

$$=\frac{3n^2+3n+2}{2}$$