A_1からA_kまでのk人がn個のボールをとっていく。A_iがとったボールの数をa_iとおくと、$a_i \geq a_{i+1} \geq 1$ $(i=1,2,3,\cdots,k-1)$ $(1 \leq k \leq n)$でなければならない。n個のボールをk人に分けるときの分け方の総数を$M(n,k)$とし、$S(n)=\sum_{k=1}^{n} M(n,k)$とおく。

（１） $M(n,n)=M(n,n-1)=M(n,1)=1$であることを証明せよ。

（２） $M(n,2)$を求めよ。

（３）次の（ｉ）（ⅱ）を証明せよ。

（ｉ） $M(n,k)=M(n-1,k-1)\left(k>\frac{n}{2}\right)$

（ⅱ） $M(n,k)=M(n-1,k-1)+M(n-k,k)\left(k \leq \frac{n}{2}\right)$

（４） $M(n,k)=S(n-k)\left(k \geq \frac{n}{2}\right)$が成り立つことを証明せよ。

（５） $M(2n,n)=S(n)$が成り立つことを証明せよ。

(解答)

（１） $M(n,n)$について

ボールがn個あって、 全てが1個以上とらないといけないので$(1,1,1,\cdots,1)$以外に

取り方はないので$M(n,n)=1$

$M(n,n-1)$について

同じく$(2,1,1,\cdots,1)$以外に取り方はないので$M(n,n-1)=1$

$M(n,1)$について

(n)以外に取り方はないので$M(n,1)=1$

（２） $n=2m(m=1,2,3,\cdots)$のとき

$(2m-1,1),(2m-2,2),\cdots,(m,m)$の$m$通りより、$M(2m,2)=m$

より、$M(n,2)=\frac{n}{2}$

$n=2m-1$のとき

$(2m-2,1),(2m-3,2),\cdots,(m,m-1)$ の $m-1$ 通りより、$M(2m-1,2)=m-1$

よって、$M(n,2)=\dfrac{n-1}{2}$

（３）（ｉ）$a_n \neq 0$ かつ $k>\dfrac{n}{2}$ より、$a_n<2$

よって、$a_n=1$ であるから、残りの $n-1$ 個のボールを $k-1$ 人で分ければ

良いので $M(n,k)=M(n-1,k-1)\left(k>\dfrac{n}{2}\right)$

（ii）$k \leq \dfrac{n}{2}$ より、$a_n \geq 2$ の可能性もある。

$a_n=1$ のときは（ｉ）と同じである。

$a_n \geq 2$ のときは、まず k 人に1個ずつ分配しておいて、残りの $n-k$ 個を k 人

で分ければよい。このとき、0個しかもらえない人が居ても良いので

$M(n-k,k)$ 通り。

（ｉ）（ii）より、$M(n,k)=M(n-1,k-1)+M(n-k,k)\left(k \leq \dfrac{n}{2}\right)$

（４）まず k 人に1個ずつ分配しておいて、残りの $n-k$ 個を k 人で分ければよいので

$M(n,k)=S(n-k)\left(k \geq \dfrac{n}{2}\right)$

（５）（４）において $n \geq \dfrac{n}{2}$ より、n を $2n$, k を n とおいて、

$M(2n,n)=S(2n-n)=S(n)$