a,b,c,d,n を自然数とする。箱の中に a 個の白玉と b 個の黒玉があり、試行を次のように定義する。

（試行）箱の中から1個の玉を取り出し、それと同じ色の玉を c 個と異なる色の玉を d 個加えて箱に戻す。

試行を n 回行ったとき、n 回目の試行において白玉を取り出す確率を P_n とする。

（1） P_1, P_2 をそれぞれ求めよ。

（2） $P_{n+1} = a_n P_n + b_n \ (n \geq 1)$ が成り立つとき、a_n, b_n をそれぞれ求めよ。

（3） $\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ。

（解答）

（1）箱の中に a 個の白玉と b 個の黒玉があり、そこから1個の玉を取り出したときに白玉である確率は、$\dfrac{a}{a+b}$ であるので、$P_1 = \dfrac{a}{a+b}$

2回目の試行で取り出す玉が

（ⅰ）1回目の試行で加わった玉から取り出す場合

（ⅱ）1回目の試行のときにあった玉から取り出す場合

の2つの場合に分けて考える。

（ⅰ）のとき

白玉を取り出す確率は1回目の試行で加わった玉から取り出して、なおかつそれが白玉である確率の場合が、

（ⅰ－1）1回目の試行で白玉を選んで箱に加えた $(c+d)$ 個の玉の中から c 個の白玉を選ぶ場合

（ⅰ－2）1回目の試行で黒玉を選んで箱に加えた $(c+d)$ 個の玉の中から d 個の白玉を選ぶ場合

であり、

（ⅰ－1）のとき $\dfrac{c+d}{a+b+c+d} \cdot P_1 \cdot \dfrac{c}{c+d}$

（ⅰ－2）のとき $\dfrac{c+d}{a+b+c+d} \cdot (1-P_1) \cdot \dfrac{d}{c+d}$

合わせて、$\dfrac{c+d}{a+b+c+d} \cdot \left\{ P_1 \cdot \dfrac{c}{c+d} + (1-P_1) \cdot \dfrac{d}{c+d} \right\}$

（ⅱ）のとき

白玉を取り出す確率は1回目の試行のときにあった玉から取り出して、なおかつそれが白玉である確率であるので、$\dfrac{a+b}{a+b+c+d} \cdot P_1$

（ⅰ）（ⅱ）より、

$P_2 = \dfrac{c+d}{a+b+c+d} \cdot \left\{ P_1 \cdot \dfrac{c}{c+d} + (1-P_1) \cdot \dfrac{d}{c+d} \right\} + \dfrac{a+b}{a+b+c+d} \cdot P_1$ より

$$P_2=\frac{a+b+c-d}{a+b+c+d}\cdot P_1+\frac{d}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{a+b+c-d}{a+b+c+d}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{d}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{a^2+ab+ac+bd}{(a+b+c+d)(a+b)}$$

（２） $n+1$回目の試行で取り出す玉が

（ｉ） n回目の試行で加わった玉から取り出す場合

（ⅱ） n回目の試行のときにあった玉から取り出す場合

の２つの場合に分けて考える。

（ｉ）のとき

白玉を取り出す確率はn回目の試行で加わった玉から取り出して、なおかつそれが白玉である確率の場合が、

（ｉ－1） n回目の試行で白玉を選んで箱に加えた$(c+d)$個の玉の中からc個の白玉を選ぶ場合

（ｉ－2） n回目の試行で黒玉を選んで箱に加えた$(c+d)$個の玉の中からd個の白玉を選ぶ場合

であり、

（ｉ－1）のとき $\dfrac{c+d}{a+b+n(c+d)}\cdot P_n\cdot\dfrac{c}{c+d}$

（ｉ－2）のとき $\dfrac{c+d}{a+b+n(c+d)}\cdot(1-P_n)\cdot\dfrac{d}{c+d}$

合わせて、$\dfrac{c+d}{a+b+n(c+d)}\cdot\left\{P_n\cdot\dfrac{c}{c+d}+(1-P_n)\cdot\dfrac{d}{c+d}\right\}$

（ⅱ）のとき

白玉を取り出す確率はn回目の試行のときにあった玉から取り出して、なおかつそれが白玉である確率であるので、$\dfrac{a+b+(n-1)(c+d)}{a+b+n(c+d)}\cdot P_n$

（ｉ）（ⅱ）より、

$$P_{n+1}=\frac{c+d}{a+b+n(c+d)}\cdot\left\{P_n\cdot\frac{c}{c+d}+(1-P_n)\cdot\frac{d}{c+d}\right\}+\frac{a+b+(n-1)(c+d)}{a+b+n(c+d)}\cdot P_n \text{ より}$$

$$P_{n+1}=\frac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)}P_n+\frac{d}{a+b+n(c+d)}$$

よって、$a_n=\dfrac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)},b_n=\dfrac{d}{a+b+n(c+d)}$

（３） $\lim_{n\to\infty}P_n=\alpha$ という極限値が存在する場合、$\lim_{n\to\infty}P_{n+1}=\alpha$ であるので、

$\alpha = \dfrac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)}\alpha + \dfrac{d}{a+b+n(c+d)}$ より、$\alpha = \dfrac{1}{2}$ となる。

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)} P_n + \frac{d}{a+b+n(c+d)} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)} \left\{ P_n + \frac{d}{a+b+nc+(n-2)d} - \frac{1}{2}\frac{a+b+n(c+d)}{a+b+nc+(n-2)d} \right\}$$

$$= \frac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)} \left(P_n - \frac{1}{2} \right)$$

より、

$P_n = \dfrac{1}{2}$ のとき $P_{n+1} = \dfrac{1}{2}$ であり、

$P_n \neq \dfrac{1}{2}$ のとき $0 < P_n < 1$ より

$r_n = \dfrac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)}$ とおくと、

$P_{n+1} - \dfrac{1}{2} = r_n \left(P_n - \dfrac{1}{2} \right) = \cdots = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} r_k \cdot \left(P_1 - \dfrac{1}{2} \right)$ より

$$P_n - \frac{1}{2} = \prod_{k=1}^{n-1} r_k \cdot \left(P_1 - \frac{1}{2} \right)$$

$r_n = \dfrac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)}$ とおくと、

$P_{n+1} - \dfrac{1}{2} = r_n \left(P_n - \dfrac{1}{2} \right) = \cdots = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} r_k \cdot \left(P_1 - \dfrac{1}{2} \right)$ より

$$P_n - \frac{1}{2} = \prod_{k=1}^{n-1} r_k \cdot \left(P_1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$r_n = \frac{a+b+nc+(n-2)d}{a+b+n(c+d)} = 1 - \frac{2d}{a+b+n(c+d)} = 1 - \frac{1}{\dfrac{a+b}{2d} + \dfrac{c+d}{2d}n}$$

$$= 1 - \frac{1}{\left(\dfrac{a+b}{2dn} + \dfrac{c+d}{2d} \right) n} < 1 - \frac{1}{\left(\dfrac{a+b}{2d} + \dfrac{c+d}{2d} \right) n}$$

であるから、$\beta = \dfrac{a+b}{2d} + \dfrac{c+d}{2d}$ とおくと、

$$\prod_{k=1}^{n-1} r_k < \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{\beta k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\beta k-1}{\beta k}\right)$$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\beta k-1}{\beta k}\right)$の逆数を取ると、

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\beta k}{\beta k-1}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{\beta k-1}\right) > \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{\beta k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\beta k} = \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} > \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log n = \infty$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \infty$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1} r_k = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(P_n - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$ である。