nを4以上の自然数とする。サイコロをn個同時に振って出た目の種類がちょうどk種類となる確率を$p_k(n)$ $(k=1,2,3,4,5,6)$で定義する。

（1） $p_1(n)$を求めよ。

（2） $p_2(n)$を求めよ。

（3） $p_3(n)$を求めよ。

（4） $p_4(n)$を求めよ。

（解答）

（1）サイコロをn個同時に振って出た目がすべて1である場合の確率は、$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

2から6においても同様であるので、$p_1(n)=\left(\frac{1}{6}\right)^n\times 6=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

（2）サイコロをn個同時に振って出た目がすべてが1または2である場合の確率は、$\left(\frac{2}{6}\right)^n$

この中にはすべてが1である確率とすべてが2である確率がそれぞれ含まれているので、

1または2の2種類の目が出る確率は$\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$

6種類の目から2種類の目を取り出す場合の数は${}_6C_2$通り存在するので、

$$p_2(n)={}_6C_2\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{5\left(2^{n-1}-1\right)}{6^{n-1}}$$

（3）サイコロをn個同時に振って出た目がすべてが1または2または3である場合の確率は、$\left(\frac{3}{6}\right)^n$

この中にはちょうど2種類のみの目が出る確率とちょうど1種類のみの目が出る確率が

含まれているので、それらを$\left(\frac{3}{6}\right)^n$から引く必要がある。

ちょうど2種類のみの目が出る確率は（2）より$(1,2),(1,3),(2,3)$の場合を考えて、

$$3\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

ちょうど1種類のみの目が出る確率は（1）より1,2,3の場合を考えて、$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$

よって、1または2または3の3種類の目が出る確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n-3\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}-3\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{3}{6}\right)^n-3\left(\frac{2}{6}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

6 種類の目から 3 種類の目を取り出す場合の数は ${}_6C_3$ 通り存在するので、

$$p_3(n)={}_6C_3\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n-3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{10\left(3^{n-1}-2^n+1\right)}{6^{n-1}}$$

（4）サイコロを n 個同時に振って出た目がすべてが 1 または 2 または 3 または 4 である場合の確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n$$

この中にはちょうど 3 種類のみの目が出る確率とちょうど 2 種類のみの目が出る確率とちょうど 1 種類のみの目が出る確率が含まれているので、それらを $\left(\frac{4}{6}\right)^n$ から引く必要がある。

ちょうど 3 種類のみの目が出る確率は（3）より $(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)$ の場合を考えて、

$$4\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n-3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

ちょうど 2 種類のみの目が出る確率は（2）より $(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$ の場合を考えて、

$$6\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

ちょうど 2 種類のみの目が出る確率は（1）より 1,2,3,4 の場合を考えて、$4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$

よって、1 または 2 または 3 または 4 の 4 種類の目が出る確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n-4\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n-3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}-6\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}-4\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n-4\left(\frac{3}{6}\right)^n+6\left(\frac{2}{6}\right)^n-4\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

6 種類の目から 4 種類の目を取り出す場合の数は ${}_6C_4$ 通り存在するので、

$$p_4(n)={}_6C_4\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n-4\left(\frac{3}{6}\right)^n+6\left(\frac{2}{6}\right)^n-4\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{15\left(4^n-4\cdot3^n+6\cdot2^n-4\right)}{6^n}$$