赤玉n個と青玉n個と白玉n個の入った袋があり、その中から1個取り出して元に戻す作業を行う。赤玉をp回、青玉をq回、白玉r回取り出す確率を$P_n(p,q,r)$とする。
ただし、$0 \le p \le n, 0 \le q \le n, 0 \le r \le n$とする。

（1） $P_n(p,q,r)$を、n,p,q,rを用いて表せ。

（2） p,q,rを固定したとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n(p,q,r)$を求めよ。

（解答）

（1）袋の中から$(p+q+r)$個の玉を取り出す方法は${}_{3n}C_{p+q+r}$通り、

赤玉n個の中からp個取り出す方法は${}_nC_p$通り、

青玉n個の中からq個取り出す方法は${}_nC_q$通り、

白玉n個の中からr個取り出す方法は${}_nC_r$通り

よって、$$P_n(p,q,r) = \frac{{}_nC_p \cdot {}_nC_q \cdot {}_nC_r}{{}_{3n}C_{p+q+r}} = \frac{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}\cdot\dfrac{n!}{q!(n-q)!}\cdot\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}{\dfrac{(3n)!}{(p+q+r)!(3n-p-q-r)!}}$$

$$= \frac{(p+q+r)!(n!)^3(3n-p-q-r)!}{p!q!r!(3n)!(n-p)!(n-q)!(n-r)!}$$

（2）$$P_n(p,q,r) = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}\cdot\frac{n!}{(n-p)!}\cdot\frac{n!}{(n-q)!}\cdot\frac{n!}{(n-r)!}\cdot\frac{(3n-p-q-r)!}{(3n)!}$$

$$= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-p+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-q+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{3n\cdot(3n-1)\cdot\cdots\cdot(3n-p-q-r+1)}$$

分母分子をn^{p+q+r}でわると、

$$P_n(p,q,r)$$
$$= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$
$$\times\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{q-1}{n}\right)\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{3\cdot\left(3-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(3-\frac{p+q+r-1}{n}\right)}$$

よって、$$\lim_{n\to\infty} P_n(p,q,r) = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}\frac{1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1}{3\cdot 3\cdot\cdots\cdot 3} = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!\cdot 3^{p+q+r}}$$