n を2以上の自然数とするとき、サイコロを n 回投げて出た目の積を $x(n)$ とする。

（１） $x(n)$ が6の倍数になる確率 $p(n)$ を求めよ。

（２） $x(n)$ が36の倍数になる確率 $q(n)$ を求めよ。

(解答)

（１） $x(n)$ が6の倍数にならない確率を $r(n)$、$k\ (1 \le k \le n)$ 回目に出た目を $y(k)$ とする。

$r(n)$ は

（ⅰ） $y(k)$ が1,2,4,5のいずれかのみが出る確率

（ⅱ） $y(k)$ が1,3,5のいずれかのみが出る確率

から $y(k)$ が1,5のみが出る確率が重複しているので引けば良いので、

$r(n) =$ （ⅰ）＋（ⅱ）－［（ⅰ）と（ⅱ）の重複］より

$$r(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって、$p(n) = 1 - r(n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

（２） $x(n)$ が36の倍数にならない確率を $s(n)$、$k\ (1 \le k \le n)$ 回目に出た目を $y(k)$ とする。

また、$x(n)$ が l の倍数にならない確率を $t(l)$, $x(n)$ が l の倍数かつ m の倍数かつにならない確率を $t(l, m)$ とする。

$t(4)$ は、

（ⅲ） $y(k)$ が1,3,5のいずれかのみが出る確率

（ⅳ） $y(k)$ が1,3,5のいずれかのみと2または6が1回だけ出る確率

（ⅲ）＋（ⅳ）より

$$t(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + {}_nC_1 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n (2n+3)$$

$t(9)$ は、

（ⅴ） $y(k)$ が1,2,4,5のいずれかのみが出る確率

（ⅵ） $y(k)$ が1,2,4,5のいずれかのみと3または6が1回だけ出る確率

（ⅴ）＋（ⅵ）より

$$t(9) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + {}_nC_1 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n (n+2)$$

$t(4,9)$ は、

（ⅶ） $y(k)$ が1,5のいずれかのみが出る確率

（ⅷ） $y(k)$ が1,5のいずれかのみと2または3または6がどれか1回だけ出る確率

（ⅸ） $y(k)$ が1,5のいずれかのみと2または3が1回ずつ出る確率

（ⅶ）＋（ⅷ）＋（ⅸ）より

$$t(4,9)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+{}_{n}C_{1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+{}_{n}C_{2}\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\right\}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(n+1)(n+4)$$

$$s(n)=t(36)=t(4)+t(9)-t(4,9)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(2n+3)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}(n+2)-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(n+1)(n+4)$$

$$q(n)=1-s(n)$$

$$=1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(2n+3)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}(n+2)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(n+1)(n+4)$$