1枚のコインを何回も投げて表が3回続けて出たらやめることにする。このとき、n回の試行でやめることになる確率をp_nとする。

（1） p_3, p_4, p_5をそれぞれ求めよ。

（2） n回目までは試行が終了せずに続き、n回目が表、裏である確率をそれぞれa_n, b_nとおくとき、$a_n, b_n \ (n \geq 3)$をそれぞれ$a_{n-1}, b_{n-1}, a_{n-2}, b_{n-2}$のうち必要なものを用いて表せ。

（3） $p_{n+3} \ (n \geq 3)$を、p_{n+2}, p_{n+1}, p_nを用いて表せ。

（4） p_7を求めよ。

(解答)

（1） p_3は3回の試行で表、表、表が出る確率であるので、$p_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

p_4は4回の試行で裏、表、表、表が出る確率であるので、$p_4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

p_5は5回の試行で表 or 裏、裏、表、表、表が出る確率であるので、

$p_5 = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

（2） n回目までは試行が終了せずに続き、n回目に表が出る確率は、

「$n-2$回目が裏、$n-1$回目が表または裏、n回目が表」のとき、

$b_{n-2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} b_{n-2} \cdots$①

「$n-2$回目が表、$n-1$回目が裏、n回目が表」のとき、

$a_{n-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} a_{n-2} \cdots$②

①と②は排反であるので、$a_n = \frac{1}{2} b_{n-2} + \frac{1}{4} a_{n-2} \ (n \geq 3) \cdots$③（一例）⇒（参考）

n回目までは試行が終了せずに続き、n回目に裏が出る確率は、

「$n-1$回目が表または裏、n回目が裏」のとき、

$b_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} + b_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \ (n \geq 3) \cdots$④（一例）⇒（参考）

（3）③,④より$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} a_{n-1} + \frac{1}{8} a_{n-2} \ (n \geq 3)$であるから、

$n-2$回目が表、$n-1$回目が表でそこで終了せず、n回目が表である確率であるので、

$p_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a_{n-2} = \frac{1}{4} a_{n-2} \ (n \geq 3)$から、$p_{n+3} = \frac{1}{2} p_{n+2} + \frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{8} p_n \ (n \geq 3)$が成り立つ。

（4） $p_6 = \frac{1}{2} p_5 + \frac{1}{4} p_4 + \frac{1}{8} p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

$$p_7=\frac{1}{2}p_6+\frac{1}{4}p_5+\frac{1}{8}p_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}=\frac{7}{128}$$

(参考)

（2）「$n-2$回目が表または裏、$n-1$回目が裏、n回目が表」のとき、

$$1\cdot b_{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}b_{n-1}\cdots①$$

「$n-2$回目が裏、$n-1$回目が表、n回目が表」のとき、

$$b_{n-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}b_{n-2}\cdots②$$

①と②は排反であるので、$a_n=\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{4}b_{n-2}\ (n\geq 3)\cdots③$

でも OK

$b_n=a_{n-1}\cdot\frac{1}{2}+b_{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})$より$b_{n-1}=\frac{1}{2}(a_{n-2}+b_{n-2})$を③に代入すると

$a_n=\frac{1}{2}b_{n-2}+\frac{1}{4}a_{n-2}$が得られるので同じことを表している。