b を自然数とし、$f(b)=x^5+x^b+1$ で定義する。$f(b)$ が x の整式の範囲で因数分解できるような b を全て求め、因数分解を実行せよ。

（解答）

$$f(1)=x^5+x^1+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

$$f(4)=x^5+x^4+1=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$$

$$f(7)=x^5+x^7+1=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1)$$

$$f(10)=x^5+x^{10}+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$$

より、

$$f(3n+1)=x^5+x^{3n+1}+1=(x^2+x+1)\left\{\sum_{i=2}^{n}\left(x^{3i-1}-x^{3i-2}\right)+x^3-x+1\right\}\ (n\geq 2)\cdots①$$

と推定できる。

①が成り立つことを数学的帰納法で示す。

（Ⅰ）$n=2$ のとき

$f(7)=x^5+x^7+1=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1)$ より①が成り立つ。

（Ⅱ）$n=k$ のとき

$f(3k+1)=x^5+x^{3k+1}+1=(x^2+x+1)\left\{\sum_{i=2}^{k}\left(x^{3i-1}-x^{3i-2}\right)+x^3-x+1\right\}$ が成り立つとき

$n=k+1$ のとき

$f(3k+4)=x^5+x^{3k+4}+1=(x^2+x+1)\left\{\sum_{i=2}^{k+1}\left(x^{3i-1}-x^{3i-2}\right)+x^3-x+1\right\}$ が成り立つことを示す。

$$f(3k+4)=x^5+x^{3k+4}+1=(x^2+x+1)\left\{\sum_{i=2}^{k+1}\left(x^{3i-1}-x^{3i-2}\right)+x^3-x+1\right\}$$

$$=(x^2+x+1)\left\{x^{3k+2}-x^{3k+1}+\sum_{i=2}^{k}\left(x^{3i-1}-x^{3i-2}\right)+x^3-x+1\right\}$$

$$=(x^2+x+1)(x^{3k+2}-x^{3k+1})+(x^2+x+1)\left\{\sum_{i=2}^{k}\left(x^{3i-1}-x^{3i-2}\right)+x^3-x+1\right\}$$

$$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^{3k+2} - x^{3k+1}\right) + x^5 + x^{3k+1} + 1$$

$$= x^5 + x^{3k+4} + 1$$

より①が成り立つ。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より 2 以上の自然数 n に対して①が成り立つ。

よって、$b = 3n + 1 (n \geq 0)$ のとき $f(b)$ は因数分解できて、

$$f(1) = x^5 + x^1 + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x^2 + 1\right)$$

$$f(4) = x^5 + x^4 + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x + 1\right)$$

$$f(3n + 1) = x^5 + x^{3n+1} + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left\{\sum_{i=2}^{n}\left(x^{3i-1} - x^{3i-2}\right) + x^3 - x + 1\right\} \ (n \geq 2)$$

となる。