関数 $f(x)=x^{10}+x^5+1$ で定義する。

（1） x の1次以上の整式 $g(x),h(x)$ に対して $f(x)=g(x)h(x)$ で定義する。このとき、$g(x),h(x)$ の次数はともに奇数でないことを示せ。

（2） $g(x)$ の次数が $h(x)$ の次数よりも小さいものとする。このとき、$g(x)$ を求めよ。

（3） $h(x)$ が整式の範囲で因数分解できないことを示すために、以下のような条件を考える。
x のの1次以上の整式 $h_1(x),h_2(x)$ に対して $h(x)=h_1(x)h_2(x)$ で定義する。また、$h_1(x)$ の次数が $h_2(x)$ の次数よりも大きくないものとする。

（ｉ） $h_1(x)$ の次数は 2 でないことを示せ。

（ⅱ） $h_1(x)$ の次数は 4 でないことを示せ。

（ⅲ） $h(x)$ が整式の範囲で因数分解できないことを示せ。

(解答)

（1） $f(x)=\left(x^5+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より $f(x)$ の因数は任意の x に対して正の値を取る。

$f(x)$ が奇数次の因数 $g(x),h(x)$ を持つとき、x の値を小さくすると $g(x),h(x)$ は負になるので不適。よって、$g(x),h(x)$ の次数はともに奇数でない。

（2） 1の3乗根を ω とすると、$\omega^3=1$、$\omega^2+\omega+1=0$ を満たす。

$$f(\omega)=\omega^{10}+\omega^5+1=\omega(\omega^3)^3+\omega^2\omega^3+1=\omega+\omega^2+1=0$$

$$f(\omega^2)=\omega^{20}+\omega^{10}+1=\omega^2(\omega^3)^6+\omega(\omega^3)^3+1=\omega^2+\omega+1=0$$

より $f(x)$ は $(x-\omega)(x-\omega^2)=x^2+x+1$ で割り切れる。

よって、$g(x)=x^2+x+1$

（3） $f(x)=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$ より

$$h(x)=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$$

（ｉ） $h_1(x)$ の次数は 2 であると仮定する。
$h(-1)=h(0)=h(1)=1$ より $h_1(-1)=h_1(0)=h_1(1)=1$ となるが、$h_1(x)$ の次数は 2 であるので矛盾。よって、$h_1(x)$ の次数は 2 でない。

（ⅱ） $h_1(x)$ の次数は 4 であると仮定する。
$h_2(x)$ の次数は 4 である。
$h(-2)=331,h(2)=151,h(3)=4561$ であり、これらはすべて素数であるので、
$h_1(-2)=1$ または $h_2(-2)=1$

$h_1(2)=1$ または $h_2(2)=1$
$h_1(3)=1$ または $h_2(3)=1$
が成り立つ。
よって、
$h_1(-2), h_1(2), h_1(3)$ の 2 つ以上が 1 である
または
$h_2(-2), h_2(2), h_2(3)$ の 2 つ以上が 1 である
ので、
$h_1(-1), h_1(0), h_1(1), h_1(-2), h_1(2), h_1(3)$ の 5 つ以上が 1 である
または
$h_2(-1), h_2(0), h_2(1), h_2(-2), h_2(2), h_2(3)$ の 5 つ以上が 1 である
$h_1(x), h_2(x)$ の次数はともに 4 であるので矛盾する。
よって、$h_1(x)$ の次数は 4 でない。

（ⅲ）（１）と（ｉ）（ⅱ）より
$h_1(x)$ の次数は奇数ではなく、2 でも 4 でもない。
$h_2(x)$ の次数は奇数ではなく、2 でも 4 でもない。
よって、$h(x)$ が整式の範囲で因数分解できない。

(参考)

（１） $g(x)$ が奇数次の関数のとき、$x \to -\infty$ で $g(x) \to -\infty$ になり、$f(x)$ の因数は任意の x に対して正の値を取ることに反するので不適。

（３）

（ｉ）$h(-1)=h(0)=h(1)=1$ より $h(x)$ の定数項が 1 であり、$f(x)$ の因数は任意の x に対して常に正の値を取るので、$h_1(-1)=h_1(0)=h_1(1)=1$ となるが、$h_1(x)=1$ の解が 3 個になり 3 次式以上になってしまうので不適。

（ⅱ）$h(a)=p$ （p：素数）のとき $h(a)=h_1(a)h_2(a)$ で $1\times p$ の形でなければならない。
よって、$h_1(-2)=1$ または $h_2(-2)=1$
$h_1(2)=1$ または $h_2(2)=1$
$h_1(3)=1$ または $h_2(3)=1$
が成り立つ。