x^7+x^5+1 を整式の範囲で因数分解せよ。

（解答）

$$
\begin{aligned}
x^7+x^5+1 &= x^7+x^6+x^5-x^6+1 \\
&= x^5\left(x^2+x+1\right)-\left(x^6-1\right) \\
&= x^5\left(x^2+x+1\right)-\left(x^3+1\right)\left(x^3-1\right) \\
&= x^5\left(x^2+x+1\right)-\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right) \\
&= \left(x^2+x+1\right)\left\{x^5-\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x-1\right)\right\} \\
&= \left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^3-x+1\right)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right) \ +\frac{3}{4}>0$$

となり、また、

$f\left(x\right)=x^5-x^4+x^3-x+1$ とおくと、$f\left(1\right)=1\neq 0,\ f\left(-1\right)=-1\neq 0$ より

x^7+x^5+1 は整式の範囲でこれ以上因数分解できない。

よって、

$$x^7+x^5+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^3-x+1\right)$$